

3.2 Диффеоморфізм при застосуванні аналітичних формул розв’язання задач прогнозування довговічності кородуючих конструкцій

При вирішенні завдань напружено-деформованого стану (НДС), прогнозування довговічності та оптимального проектування багатоеlementних конструкцій, що працюють в умовах корозійного зносу, традиційно застосовується підхід, заснований на спільному використанні будь-якого чисельного методу розрахунку розв’язання задачі НДС та чисельного методу розв’язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь, що описують процес корозійного зносу конструкції. Зазвичай на вирішення завдання НДС використовується метод скінченних елементів (МСЕ). Питанню підвищення ефективності обчислювальних методів присвячено багато робіт, але воно до кінця не вирішено.

У роботі розглядаються динамічні системи: кородуючі конструкції (КК), проблеми якісного аналізу таких систем є доцільними. Рене Тома запропонував використовувати топологічну теорію динамічних систем, яка бере початок ще з робіт Пуанкаре, та привернув увагу на важливість вимог структурної стійкості таких систем [133, 141]. По суті проблема закладається у чутливості/нечутливості динамічних систем до невеликих збурень. Математичний апарат теорії катастроф дозволяє стверджувати, що досліджувану систему можна описати локально за допомогою однієї із семи стандартних форм, тобто елементарних катастроф [133, 141]. Розглянемо фізичну модель (тобто КК) та продемонструємо типові риси катастрофічної поведінки з точки зору математичного апарату цієї теорії.

Введемо деякі поняття, які будуть використані у роботі. Нехай U та V відкриті множини у R^n та нехай $f: U \rightarrow R^n$ причому $f(U)=V$. Тоді функція f називається *диффеоморфізмом*, якщо:

- f є гладкою;
- для неї існує обернена функція $g: V \rightarrow R^n$, $f \circ g = 1_V$, $g \circ f = 1_U$;
- g є гладкою.

З геометричної точки зору диффеоморфізм є плавним вигинанням однієї з систем координат, тобто гладкої заміни змінних. Для перевірки властивості на диффеоморфізм існує теорема про обернену функцію [141].

ТЕОРЕМА (про обернену функцію). Нехай $f: U \rightarrow R^m$ – гладке відображення та $x \in U$. Якщо лінійне відображення $Df|_x$ є не виродженим, то f є локальним диффеоморфізмом в x .

Таким чином, для перевірки відображення на локальний диффеоморфізм, необхідно обчислити відповідну похідну. Слід зауважити, що $Df|_x$ не вироджено тоді і тільки тоді коли якобіан: $Jf|_x \neq 0$. Дві функції f та $g: R^n \rightarrow R$ називаються *еквівалентними* поблизу початку координат, якщо існує локальний диффеоморфізм $y: R^n \rightarrow R^n$ та сталий «зсувний член» γ , такий що: $g(x) = f(y(x)) + \gamma$ у деякому околі нуля. Для сімейства $f, g: R \times R^r \rightarrow R$. Крім того диффеоморфізм може перетворюватися у сімейство диффеоморфізмів, а також у довільний диффеоморфізм [141]. Без обмеження суджень розглядається одна з феноменологічних моделей динамічної системи, що описує корозійний знос, в якій швидкість корозії лінійно залежить від рівня механічних напружень [135-138, 140]

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \cdot (1 + k\sigma_i), \quad \delta_i|_{t=0} = 0; \quad i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Тут δ_i та σ_i – глибина корозії та напруження в i -му елементі; v_0 – швидкість корозії при відсутності напружень; k – коефіцієнт, який враховує напруження на швидкість корозії; t – час.

У роботі [136] для моделі корозійного зносу (1) були отримані залежності довговічності стрижневого елемента довільного перерізу, схильного до корозійного зносу, які в аналітичному вигляді можна записати наступним чином:

$$t = t_0 - 2 \cdot k \cdot Q \cdot \left[\arctg \frac{2 \cdot a \cdot \delta + b}{d_1} - \arctg \frac{b}{d_1} \right] \cdot \frac{1}{v_0 \cdot d_1}, \quad (2)$$

$$t = t_0 - 2 \cdot k \cdot Q \cdot \ln \left[\frac{(2 \cdot a \cdot \delta + b - d_2) \cdot (b + d_2)}{(2 \cdot a \cdot \delta + b + d_2) \cdot (b - d_2)} \right] \cdot \frac{1}{v_0 \cdot d_2}. \quad (3)$$

У статично визначеній конструкції не відбувається перерозподіл внутрішніх зусиль ($Q=const$) в елементах (вони визначаються з рівняння рівноваги), то точний розв'язок задачі прогнозування довговічності може бути отримано безпосередньо з аналітичних рівнянь, що визначають довговічність в розтягнутих або стиснутих стрижнях довільного поперечного перерізу. Ці аналітичні формули використовуються також для наближеної оцінки довговічності статично невизначених конструкцій.

У наведених вище формулах (2) і (3) прийнято такі позначення: Q – осьове навантаження; s – коефіцієнт форми перерізу; P_0 і A_0 – відповідно периметр та площа перерізу в початковий момент часу. Залежно від форми поперечного перерізу стрижня ($s=\pi$ для круглого перерізу та $s=4$ фасонних профілів), а також при необхідній точності, можливі різні варіанти розв'язків. Тут також прийняті наступні позначення: $t_0 = \frac{\delta}{v_0}$; $a=s$; $b = -P_0$; $c=A_0+kQ$. Тоді дискримінанти:

$d_1 = \sqrt{4ac-b^2}$, $d_2 = \sqrt{b^2-4ac}$. Розв'язок (2) реалізується при $4ac-b^2 > 0$, розв'язок (3) – при $4ac-b^2 < 0$.

У процесі розв'язання задачі прогнозування довговічності залежно від поточних значень геометричних розмірів перерізів елементів та напружень, що виникають у них, знак дискримінанта може змінюватися. Така можливість була передбачена і для її реалізації були отримані аналітичні залежності для даних випадків. Проте, якщо у якийсь поточний час відбувається зміна знаку дискримінанта, це означає, що у цій точці відбувається перехід від однієї аналітичної залежності до іншої. Виникає питання про те, якою буде похибка розв'язання задачі прогнозування довговічності, якщо не враховувати можливість такого «стрибка».

В отриманих формулах значення часу визначається через належне значення глибини корозії δ , що відповідає моменту вичерпання несучої здатності стрижня, яке наперед заздалегідь невідоме [136]. З метою вивчення загальних закономірностей поведінки функцій, що описують відомі аналітичні

залежності (2) і (3), пропонується постановка задачі, де в якості моделі розглядається стрижень, навантажений в осьовому напрямку силою Q і який знаходиться в агресивному середовищі, що викликає зміну його площі перерізу [136]. Для визначеності передбачається, що стрижень має кільцевий поперечний переріз, а корозійне зношування описується рівнянням (1).

Параметри стрижня та механічні характеристики його матеріалу вважаємо відомими: площа перерізу $A_0 = 20 \text{ см}^2$, коефіцієнт злитості $\eta = P_0/A_0 = 0,8 \text{ см}^{-1}$ (відношення значення периметра до значення площі перерізу у початковий момент часу); граничне значення напруження $[\sigma] \leq 1250 \text{ МПа}$. Розмір прикладеного навантаження $Q = 5000 \text{ кг}$. Параметри агресивного середовища: $v_0 = 0,1 \text{ см/рік}$; $k = 0,0003 \text{ МПа}^{-1}$ [134].

Умови експлуатації стрижня такі, що корозії піддається як зовнішня, так і внутрішня його поверхня. Довговічність проєкту при кроці за часом $h_t = 0,001 \text{ років}$ становила $t = 15,34$. На рис. 1 представлена залежність поточних значень напружень від часу у постановці, яка використовувалась раніше та враховувала зміну знаку дискримінанта.

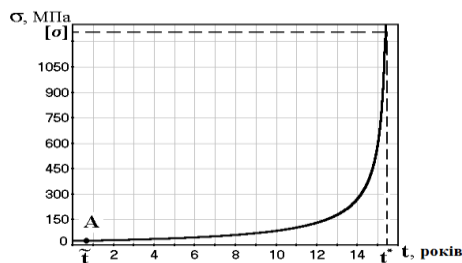


Рисунок 1. Поточна залежність напружень від часу.

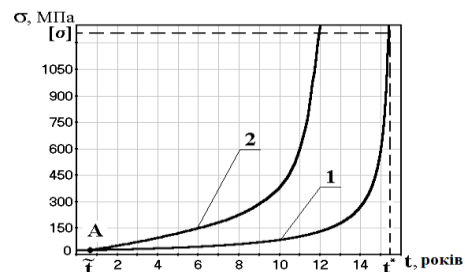


Рисунок 2. Поточна залежність напружень від часу у двох постановках.

Тут точка $A (0,665; 264,971)$ – це точка, де значення дискримінанта квадратного рівняння змінилося з негативного на позитивне. Отже, на інтервалі $(0; \tilde{t})$ значення довговічності визначається за формулою (2), але на інтервалі $(\tilde{t}; t^*)$ – за допомогою формули (3). Дослідимо особливості поведінки функції в околиці цієї точки. Очевидно, що на інтервалі $(0; \tilde{t})$ функція змінюється за визначеним законом, наприклад, (2). Якщо у точці A знак дискримінанту не змінюється, то і функція описується за тим же законом (крива 1 (рис. 2)):

$$t_{1i} = f_1(\sigma_i), i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Однак, якщо в точці A знак дискримінанта змінився на протилежний, відповідно до запропонованого раніше алгоритму, вибирається й інша розрахункова формула (3). Як наслідок, функція буде мати інший якісний вигляд, наприклад, описуваний кривою 2 (рис. 2):

$$t_{2i} = f_2(\sigma_i), i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Якщо відбувається зміна знаку дискримінанту функції, а, отже, розв'язок має якісну відмінність, яка зумовлена видом функції, то розв'язання задачі може бути знайдено: 1) або наближено до певної похибки, якщо графіки цих функцій будуть розташовані досить близько один до одного; 2) або взагалі знайдено неправильно – у протилежному випадку. Дослідження розв'язків задачі для встановлення їх можливих якісних та кількісних розбіжностей буде розглянуто далі. Пропонується скористатися методикою зі зміною параметра інтегрування при вирішенні системи звичайних диференціальних рівнянь (СДР), що описують процес накопичення геометричних ушкоджень конструкції [139].

Зазвичай інтегрування СДР проводиться за часом (параметр чисельного інтегрування) [136], то запропонуємо використовувати в якості параметру інтегрування – напруження. Розглянемо дві постановки задачі прогнозування довговічності – постановку 1, коли зміна знаку дискримінанта не враховується, та постановку 2, коли ця зміна враховується. У разі постановки 1 поточне значення напруження на кожному кроці залежить від початкового значення напруження: $\sigma_n = f(\sigma_0)$. Визначення поточних значень напруження, відповідно і часу, проводиться від однієї початкової точки, як за напруженнями, так і за часом. Результати чисельних розв'язків у постановці 1 подано на рис. 3. Далі розглядається постановка 2 (рис. 4), яка враховує зміну знаку дискримінанта в точці A . При цьому поточні значення напруження, а, отже, часу, на кожному кроці визначаються, при використанні інформації, яка отримана на попередньому кроці: $\sigma_n = f(\sigma_{n-1})$.

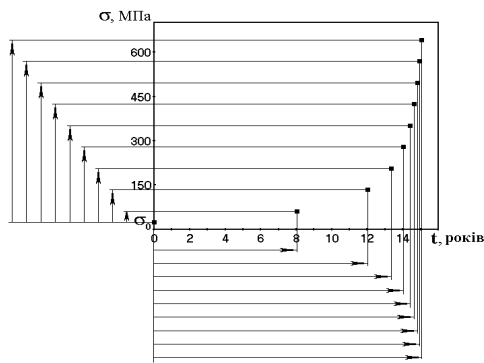


Рисунок 3. Ілюстрація

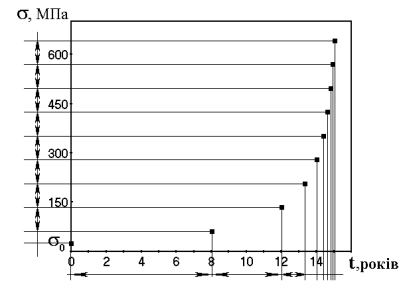


Рисунок 4. Ілюстрація

чисельного розв'язку у постановці 1. чисельного розв'язку у постановці 2.

В результаті чисельного розв'язання задачі у двох постановках отримано наступні результати. Значення часу до руйнування на кожному кроці інтегрування у постановці 1 та постановці 2 збіглися з точністю до п'ятого знаку після коми. Результати дають підстави припустити, що в області визначення аналізованих функцій (2) та (3), вони є еквівалентними. За допомогою математичного апарату теорії катастроф з'ясуємо можливість опису однієї й тієї ж фізичної величини різними функціями; дослідимо поведінку цих функцій та можливість переходу від однієї функції до іншої.

Введемо такі позначення: якщо $b^2 < ac$, то функція у загальному виді запишеться наступним чином: $f(\delta) = \arctg \frac{2 \cdot a \cdot \delta + b}{d_1} - \arctg \frac{b}{d_1}$. У протилежному

випадку – якщо $b^2 > ac$, то використовуємо наступну залежність:

$$g(\delta) = \ln \left[\frac{(2 \cdot a \cdot \delta + b - d_2) \cdot (b + d_2)}{(2 \cdot a \cdot \delta + b + d_2) \cdot (b - d_2)} \right].$$

Зважаючи на те, що результати розрахунків

дали практично абсолютний збіг значень цих функцій, то можна прийти до висновку, що на якомусь інтервалі функції $f(\delta)$ та $g(\delta)$ є якісно подібними.

Згідно теореми про обернену функцію маємо: якщо лінійне відображення $Df|_{\delta}$ є не виродженим, то f є локальним диффеоморфізмом у точці $\tilde{t}$. Аналогічні судження для $Dg|_{\delta}$ у точці $\tilde{t}$.

$$Df|_{\delta} = \frac{2 \cdot a \cdot d_1 \cdot (d_1^2 + b^2)}{(d_1^2 + (2 \cdot a \cdot \delta + b) \cdot b)^2}, \quad Dg|_{\delta} = \frac{4 \cdot a \cdot d_2 \cdot (b + d_2)}{(b - d_2)(2 \cdot a \cdot \delta + b + d_2)^2}.$$

При розгляді цього фізичного процесу зручно виділити деяку довільну систему координат, назовемо її початковою. У термінах теорії катастроф дві функції *локально-еквівалентні*, якщо існує локальний диффеоморфізм ($g(\delta)$) такий, що виконується: $g(\delta) = f(y(\delta)) + \gamma$, де γ – «зсувний член», що дозволяє повернутися в початок координат початкової системи [133, 141].

Відповідно до визначення диффеоморфізму [141] функція задовольняє трьом умовам: вона гладка, до неї існує зворотна функція, і ця зворотна функція гладка. Якщо використати це визначення та останню залежність, то можна отримати:

$$y(\delta) = tg\{\ln[\delta] - \gamma\}. \quad (6)$$

Перехід у формулі (6) від δ до y розглядається, як перехід до нових координат. Тут y – гладка обернена локальна заміна координат, а «зсувний член» γ потрібен, щоб повернути значення функції в нулі до вихідного. Зрозуміло, що його можна позбутися за допомогою відповідного зсуву початку системи координат. Таким чином, за допомогою локальної еквівалентності функцій можна виразити одну функцію через іншу з точністю до константи γ . У теорії катастроф одна з теорем дозволяє приводити функції до простого вигляду зручному для класифікації, за допомогою координатних заміни. Наведемо її мовою оригіналу [141].

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f : R \rightarrow R$ – гладка функція, для якої $f(0) = Df|_0 = \dots = D^{k-1}f|_0 = 0$, але $D^k f|_0 \neq 0$. Тоді, за допомогою деякої гладкої локальної заміни координат, її можна привести до вигляду:

$$x^k \quad \text{при непарному } k; \quad \pm x^k \quad \text{при парному } k,$$

причому в останньому випадку знак співпадає зі знаком $D^k f|_0$. Тут $D^k f|_0$ – похідна i -го порядку у точці 0, де $i = \overline{0, k}$.

У нашому випадку функції $f(\delta)$ та $g(\delta)$ мають непростий аргумент δ , тобто насправді є складеними функціями (формули (2) і (3)). Для зручності використання функції $f(\delta)$ перетворимо її у вигляд:

$$f(\delta) = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot a \cdot \delta \cdot d_1}{d_1^2 + (2 \cdot a \cdot \delta + b) \cdot b} \quad [134].$$

Знайдемо таку гладку локальну заміну координат, за допомогою якої функції $f(\delta)$ та $g(\delta)$ можуть бути представлені з використанням степеневих функцій. Очевидно, що при $\delta = 0$ отримаємо:

$$Df|_{\delta=0} = \frac{2 \cdot a \cdot d_1}{d_1^2 + b^2} \neq 0, \quad Dg|_{\delta=0} = \frac{4 \cdot a \cdot d_2}{b^2 - d_2^2} \neq 0,$$

де $\delta = 0$ – некритична точка, очевидно, що $b^2 - d_2^2 \neq 0$.

Якщо використати визначення локально-еквівалентних функцій в околі деякої точки, отримаємо представлення однієї функції через іншу:

$$y(\delta) = \operatorname{tg} \left\{ \ln \left[\frac{(2 \cdot a \cdot \delta + b - d_2) \cdot (b + d_2)}{(2 \cdot a \cdot \delta + b + d_2) \cdot (b - d_2)} \right] - \gamma \right\}.$$

Відповідно до класифікаційної теореми Тома сімейство функцій $f(\delta)$ буде структурно стійке та локально-еквівалентне в околиці точки $\delta = 0$ (яка є некритичною та стійкою в тому сенсі, що малі збурення усуваються простою перепараметризацією області визначення) канонічної форми $f(\delta) \doteq \delta_1$ (через громіздкість тексту теореми її повне формулювання не наводиться). Тут знак $\doteq$ означає "... дорівнює після гладкої заміни змінних ..." [141]. Аналогічно сімейства функцій $g(\delta)$: $g(\delta) \doteq \delta_2$. Неважко помітити, що ті ж результати були отримані за допомогою теореми 1. Аналогічні судження можна навести для розглянутих функцій, якщо записати формулу для локального диффеоморфізму ($f(\delta)$): $f(\delta) = g(z(\delta)) + \eta$, де η – «зсувний член», що дозволяє повернутися в початок координат початкової системи [141].

Перепишемо залежність та отримаємо: $z(\delta) = \exp^{\{\operatorname{arctg}[\delta] - \eta\}}$. Перехід у формулі від δ до z розглядається, як перехід до нових координат. Тут z – гладка

обернена локальна заміна координат, а «зсувний член» η потрібен, щоб повернути значення функції в нулі до вихідного. Знову ж таки, його можна позбутися за допомогою відповідного зсуву початку системи координат. Таким чином, за допомогою локальної еквівалентності функцій можна виразити одну функцію через іншу з точністю до константи η .

$$z(\delta) = \exp \left\{ \arctg \left(\frac{2 \cdot a \cdot \delta \cdot d_1}{d_1^2 + (2 \cdot a \cdot \delta + b) \cdot b} \right) - \eta \right\}.$$

У зв'язку з тим, що функції у (2)-(3) є гладкими, то однією зі стандартних математичних процедур є розкладення її у ряд Тейлора в околиці деякої точки. Позначимо у формулах (2) та (3) аргументи функцій (причому у формулі (3) перетворимо аргумент для розкладання відповідним чином):

$$\beta = \frac{2 \cdot a \cdot \delta \cdot d_1}{d_1^2 + (2 \cdot a \cdot \delta + b) \cdot b}, \quad \varphi = \frac{4 \cdot a \cdot \delta \cdot d_2}{(b - d_2) \cdot (2 \cdot a \cdot \delta + b + d_2)}.$$

Можна записати розкладення по «струям» [141] аналітичних функцій у формулах (2) та (3):

$$\beta - \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} - \frac{\beta^7}{7} + \frac{\beta^9}{9} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{\beta^{2n+1}}{2n+1} + \dots + \gamma = \varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^3}{3} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\varphi^k}{k} + \frac{(-1)^m \cdot \varphi^{m+1}}{(m+1) \cdot (\Theta \varphi + 1)^{m+1}}.$$

Тут $0 < \Theta < 1$ та $\varphi > -1$. З останньої формули можна отримати «зсувний» коефіцієнт γ , аналогічно можна отримати η . Якщо прийняти (a, b, c) (у формулах при обчисленні дискримінанта) за координати точки в тривимірному просторі (R^3) та розглянути множину точок поверхні, що задовольняють умові $b^2 = ac$, це буде подвійний конус (так званий дискримінантний) з вершиною у початку координат та який містить вісі a і c . В залежності від знаку $b^2 (>/<) ac$ (відповідно зовнішня/внутрішня поверхня конуса), то розрахунок проводиться з допомогою належних формул. В даному випадку конус – це біфуркаційна множина, що має подвійність. Коли параметри системи, плавно змінюючись, «перескакують» поверхню $b^2 = a \cdot c$, то система стрибком переходить з одного стану стійкої рівноваги в інший. Через еквівалентність функцій виходить, що розрахунок можна проводити з однією з цих функцій. Результати чисельних експериментів

доводять, що значення таких різних функцій як арктангес і натуральний логарифм збігаються з точністю до п'ятого знаку, що свідчить про якісну зміну поведінки функцій. Отже, можна стверджувати, що біфуркаційна множина існує.

В цьому випадку перехід від однієї функції до іншої можливий через їхню еквівалентність. У реальних ситуаціях, коли граничне значення напружень $[\sigma]$ не перевищує поточного при вирішенні задач прогнозування довговічності стрижневих елементів, які кородують, тоді доцільно використовувати наступну формулу для розрахунку часу довговічності стрижня при відомому «зсувному члені» γ :

$$t^* = t_0 - \frac{2 \cdot k \cdot Q}{v_0 \cdot |d|} \cdot \left\{ \arctg \left[\frac{2 \cdot a \cdot \delta \cdot |d|}{|d|^2 + (2 \cdot a \cdot \delta + b) \cdot b} \right] + \gamma \right\}. \quad (7)$$

Якщо знайдено «зсувний член» η , тоді можна отримати аналітичний розв'язок прогнозування довговічності кородуючих конструкцій за модифікованою (3) формулою (де $d \neq 0$):

$$t^* = t_0 - \frac{2 \cdot k \cdot Q}{v_0 \cdot |d|} \cdot \left\{ \ln \left[\frac{(2 \cdot a \cdot \delta + b - |d|) \cdot (b + |d|)}{(b - |d|) \cdot (2 \cdot a \cdot \delta + b + |d|)} \right] + \eta \right\}. \quad (8)$$

За допомогою теорії катастроф вдалося пояснити особливості поведінки дійсних гладких функцій у процесі розв'язання задач прогнозування довговічності стрижневих кородуючих конструкцій. Визначено біфуркаційну множину та встановлено, що функції прогнозованого значення довговічності локально-еквівалентні та подібні з точністю до диффеоморфізму. Використання формул (2) та (3), або (7), або (8) для отримання аналітичного розв'язку прогнозованого значення довговічності залежить від дослідника предметної області та обчислювальних витрат. Аналіз застосування аналітичних формул дозволяє підвищити ефективність чисельних методів при розв'язанні систем диференціальних рівнянь, які описують корозійний знос конструкції.