

## SECTION 1. AEROSPACE ENGINEERING AND TECHNOLOGIES

### 1.1 Сравнение моделей обтекания твердых тел идеальной средой

В настоящее время существует несколько моделей обтекания твердых тел идеальной средой. Наиболее известная модель Д'Аламбера–Эйлера (или парадокс Д'Аламбера–Эйлера) описана во многих энциклопедиях и учебниках.

Формулировка парадокса Д'Аламбера–Эйлера в Википедии [1]:

«Парадокс Д'Аламбера (парадокс Д'Аламбера–Эйлера) – утверждение в гидродинамике идеальной жидкости, согласно которому при стационарном (не обязательно потенциальном и безотрывном) обтекании твёрдого тела безграничным поступательным прямолинейным потоком невязкой жидкости, **при условии выравнивания параметров (потока) далеко впереди и позади тела**, сила сопротивления равна нулю.

В силу принципа относительности Галилея можно говорить и о парадоксе Д'Аламбера в случае поступательного прямолинейного движения тела с постоянной скоростью в безграничном объёме идеальной жидкости, который покоится на бесконечности».

Еще одно определение парадокса Д'Аламбера–Эйлера в Большой Советской Энциклопедии [2]:

«Д'Аламбера – Эйлера парадокс (Д.–Э. п.), положение гидродинамики, согласно которому при равномерном и прямолинейном движении тела внутри безграничной жидкости, лишённой вязкости, вихреобразований и поверхностей разрыва скоростей, результирующая сила сопротивления жидкости движению тела равна нулю.

Это положение было высказано французским учёным Ж. Д'Аламбером в 1744 и петербургским академиком Л. Эйлером в 1745. Отсутствие сопротивления движению тела со стороны жидкости при указанных выше предположениях в гидродинамике доказывается строго математически как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости. Физически отсутствие сопротивления объясняется

тем, что при указанных условиях поток жидкости должен замыкаться позади движущегося тела, причём жидкость оказывает на заднюю сторону тела воздействие, уравнивающее воздействие (всегда имеющее место) на переднюю сторону. В действительности тело при своём движении в жидкости или газе всегда испытывает сопротивление.

Противоречие между действительностью и содержанием Д.–Э. п. объясняется тем, что в реальной среде не выполняются те предположения, на которых строится доказательство парадокса. При движении тела в жидкости всегда проявляются и вязкость жидкости, и вихреобразования (в особенности позади тела), и возникновение поверхностей разрыва скорости. Все эти факторы и вызывают сопротивление движению тела со стороны жидкости».

Еще одно определение парадокса Даламбера–Эйлера в Циклопедии [3]:

«Парадокс Даламбера – название парадокса, который утверждает, что цилиндр (или шар), обтекаемый стационарным ламинарным потоком невязкой несжимаемой жидкости (движущийся в этой жидкости), не испытывает никакого сопротивления своему движению со стороны потока. Сформулирован французским математиком Жаном ле Роном Д’Аламбером (Даламбером) в 1752 году».

Каждое из этих трех определений последовательно сужает условия (требования) для реализации этого парадокса: если в Википедии [1] поток идеальной жидкости «**не обязательно потенциальный и безотрывный**», то в Большой Советской Энциклопедии [2] поток идеальной жидкости должен быть «**лишён вязкости, вихреобразований и поверхностей разрыва скоростей**». Еще больше ограничений заложено в Циклопедии [3]: форма твердого тела может быть только **цилиндром или шаром**.

В Циклопедии [3] для иллюстрации парадокса Даламбера использован рисунок 1 из моих статей 90-х годов прошлого века. Аналогичный рисунок можно найти в моей публикации в Интернете 2005 года [5] или в моей статье 2009 года в Современном научном вестнике [4]. Статья в Циклопедии [3] написана неаккуратно с ошибками, а рисунок 2 в этой статье (в котором якобы

присутствует «застойная зона») повторяет симметричный рисунок 1 (без «застойной зоны»). Любой желающий может найти в интернете рисунок 2 с «Застойной зоной» позади твердого тела в указанных моих статьях [4,5].

Главный вывод в моих статьях [4,5] заключается в том, что так называемый парадокс Д'Аламбера–Эйлера – это всего лишь **теоретическое недоразумение**, возникшее из-за произвольно (необоснованно) выбранных начальных условий – выравнивание параметров потока идеальной среды далеко впереди и позади тела, а также отсутствие учета физических ограничений на параметры потока.

Ни в одном из доказательств парадокса Д'Аламбера–Эйлера не учитывают естественное физическое ограничение для давления в потоке идеальной среды, которое **не может быть отрицательным**.

На рисунке 1 показан пример «строго математического» доказательства парадокса Д'Аламбера–Эйлера при обтекании круглого бесконечного цилиндра потенциальным безвихревым потоком идеальной среды. Рис. 1.а иллюстрирует подход Эйлера. Этот рисунок можно рассматривать как фотографию равномерного, установившегося потока частиц идеальной среды. Поэтому параметры потока идеальной среды на этом рисунке не изменяются во времени, но будут различными для разных точек геометрических координат (например, Декартовой системы координат).

На бесконечном удалении от цилиндра направление вектора скорости потока  $V_\infty$  совпадает с положительным направлением оси  $Ox$  (см. рис. 1.а).

Задача разделяется на два этапа [6,7] :

- определение состояния движения идеальной среды при обтекании твердого тела, то есть построение кинематической картины течения;
- определение сил взаимодействия между идеальной средой и твердым телом, то есть решение динамической задачи.

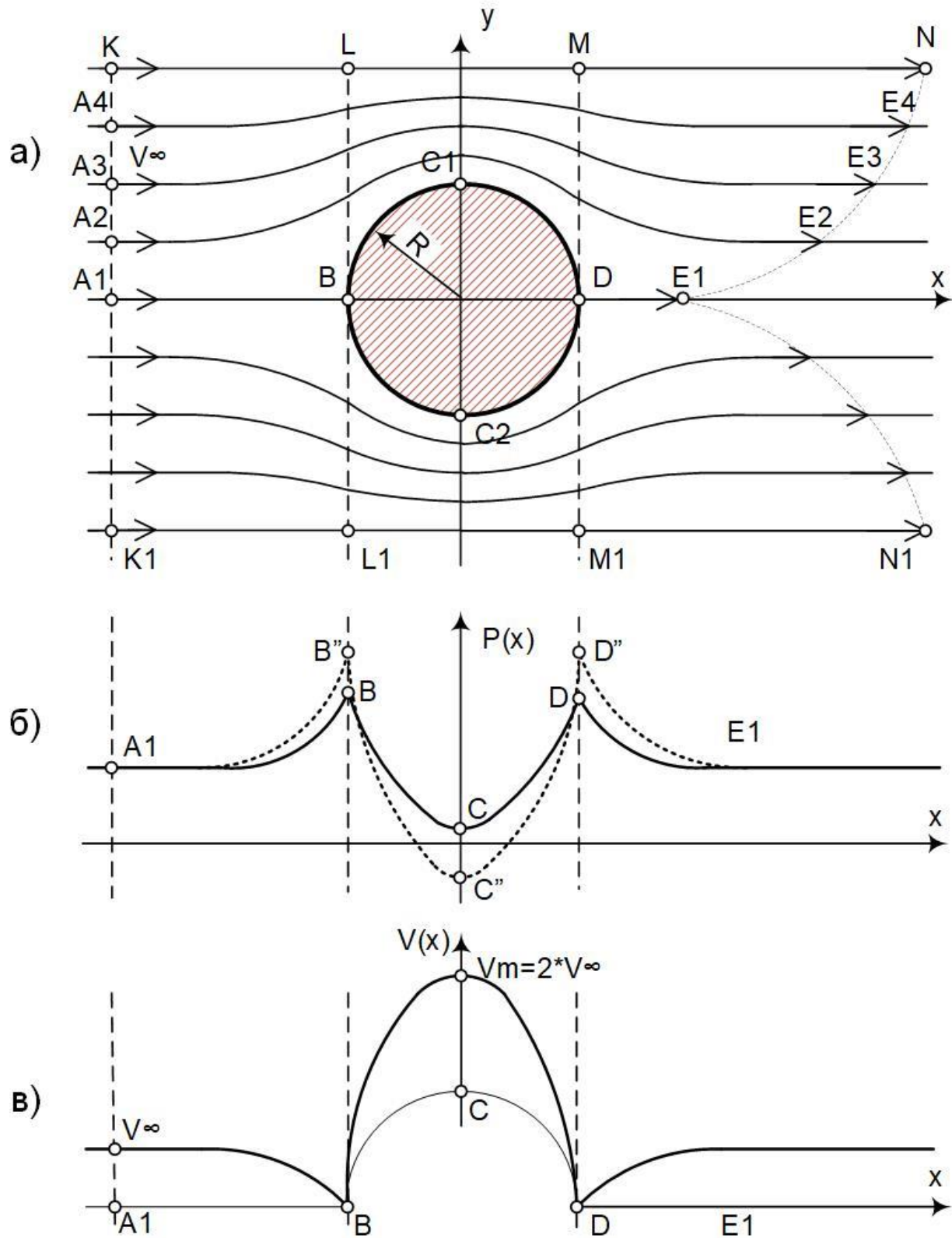


Рисунок 1 – Обтекание круглого цилиндра потоком идеальной среды

На первом этапе обычно выбирают **безвихревое движение** идеальной среды, и задача сводится к нахождению комплексного потенциала [7]:

$$w(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y), \quad (1)$$

где:  $\varphi(x, y)$  – потенциал скорости;

$\psi(x, y)$  – функция тока.

Выбор потенциальной безвихревой модели аргументируется не противоречием этой модели теореме Лагранжа [6,7].

Задача может быть сведена к нахождению только одной функции  $\psi$  или  $\varphi$ , так как потенциал  $\varphi$  связан с  $\psi$  известными условиями Коши-Римана, позволяющими определить  $\varphi$  в виде квадратуры по известной функции  $\psi$  [7].

Функция тока  $\psi$ , которая во всех точках потока идеальной среды предполагается непрерывной, удовлетворяет во всех точках уравнению Лапласа:  $\nabla^2 \psi = 0$  (условие безвихревого обтекания) [7].

Должно также выполняться граничное условие – непроникновение через твердую стенку [6,7], т.е. на контуре твердого тела нормальная составляющая скорости прилегающих частиц идеальной среды равняется нулю.

Определение плоского безвихревого движения невязкой и несжимаемой жидкости, вызываемого движением ограничивающих область течения контуров, сводится к решению некоторой задачи Дирихле [7].

Аналитическое решение этой задачи указывает на то, что линия тока, примыкающая к поверхности круглого цилиндра, является линией тока  $\psi = 0$ . Остальные линии тока – суть кривые третьего порядка (рис. 1.а) [7].

Скорость частиц идеальной среды на участке А1-В уменьшается от  $V_\infty$  до 0. На участке В-С-Д скорость изменяется в соответствии с выражением:

$$V = 2 \cdot V_\infty \cdot |\sin \theta| = V_m \cdot |\sin \theta|, \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол в полярной системе координат.

Наибольшее значение скорости  $V_m = 2 \cdot V_\infty$  достигается в точках С1 и С2 (рис. 1.а). После точки Д скорость частиц идеальной среды увеличивается от 0 до  $V_\infty$  (рис. 1.в).

На втором этапе, при решении динамической задачи, вычисляется распределение давления по контуру твердого тела на основе интеграла Бернулли.

Полная симметрия распределения скорости движения частиц идеальной среды по поверхности цилиндра относительно вертикальной оси  $OY$  (рис. 1.в) соответствует симметрии распределения давления (рис. 1.б – сплошная линия) [4,5,6,7].

Поэтому интегрирование давления по поверхности цилиндра дает нулевое значение, а, следовательно, и сила, действующая на цилиндр со стороны идеальной среды, равна нулю.

При детальном рассмотрении рис.1.а и рис.1.в обращает на себя внимание тот факт, что время перемещения частицы идеальной среды из точки  $A1$  в точку  $B$  будет в 1,5...2 раза больше, чем время продвижения частицы идеальной среды из точки  $K$  в точку  $L$  с постоянной скоростью  $V_\infty$ :  $t_{KL} = S_{KL} / V_\infty$ .

Потому что расстояние  $S_{KL} = S_{AB}$ , а скорость движения частицы идеальной среды из точки  $A1$  в точку  $B$  уменьшается от  $V_\infty$  до нуля (рис. 1.в).

Аналогично время продвижения частицы идеальной среды из точки  $D$  в точку  $E1$  будет в 1,5...2 раза больше, чем время продвижения частицы идеальной среды из точки  $M$  в точку  $N$  с постоянной скоростью  $V_\infty$ .

При расчете времени движения частицы идеальной среды между точками  $B$ - $C$ - $D$  необходимо учитывать, что расстояние  $S_{BCD}$  рассчитывается по полуокружности:  $S_{BCD} = \pi * R$  (на рис. 1.в этот участок горизонтальной оси  $OX$  изображен в виде полуокружности).

Расчетное время движения частицы идеальной среды между точками  $B$ - $C$ - $D$  будет в 2,25 раз больше, чем время перемещения частицы идеальной среды между точками  $L$ - $M$ . Поэтому частицы идеальной среды, которые начали движение в точках  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$ ,  $A4$ ,  $K$ , выстроятся позади цилиндра в клин  $E1$ ,  $E2$ ,  $E3$ ,  $E4$ ,  $N$ , обозначенный на рис.1.а точечной пунктирной линией.

С учетом изложенного на основе принципа относительности Галилея рассмотрим равномерное движение круглого цилиндра в неподвижной идеальной среде, – это соответствует подходу Лагранжа (рис. 2). Для того, чтобы не загромождать рисунок показаны только верхние траектории движения частиц (на самом деле рисунок должен быть симметричным относительно

горизонтальной временной оси)

Точки неподвижной идеальной среды в начальный момент времени  $t_0$ : A1, A2, A3, A4, K на рис. 2 – соответствуют одноименным точкам на рис. 1.а. В момент времени  $t_0$  цилиндр, который равномерно движется влево со скоростью  $V_\infty$ , находится значительно правее этих точек.

Пунктиром обозначены положения цилиндра в моменты времени:

- $t_1$  – частица идеальной среды из точки A1 ускорилась от нуля до скорости движения цилиндра  $V_\infty$  и переместилась в точку B;
- $t_2$  – частица идеальной среды из точки B переместилась в точку C1, в этот момент времени эта частица движется со скоростью  $V_\infty$ , но в противоположном направлении (с учетом соотношения (2));
- $t_3$  – частица идеальной среды из точки C1 переместилась в точку D, замедлив свою скорость от  $2 \cdot V_\infty$  до  $V_\infty$ .

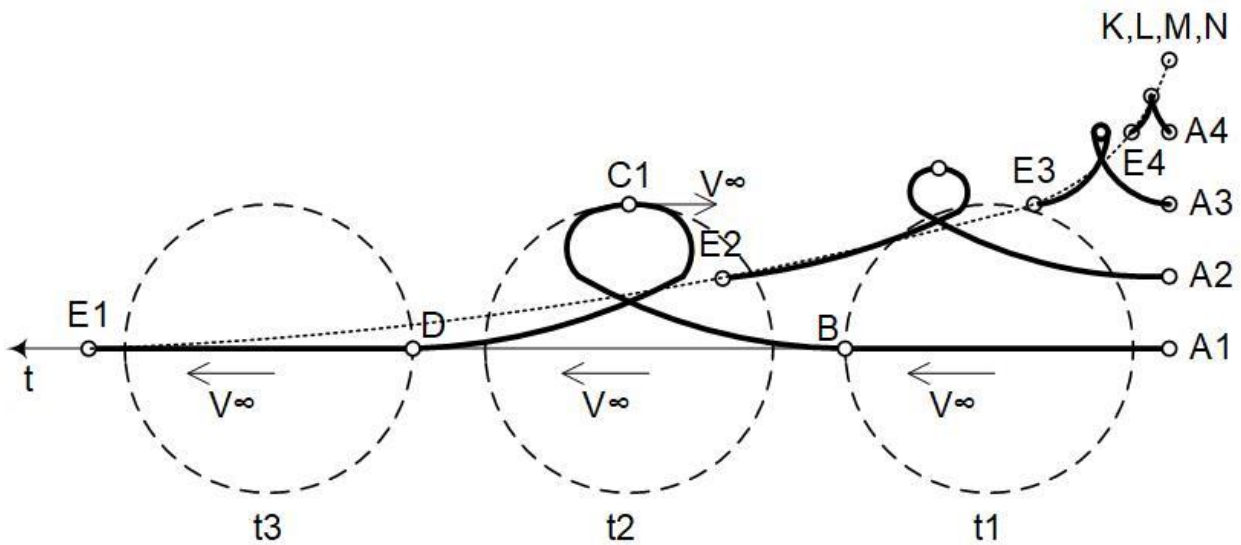


Рисунок 2 – Движение круглого цилиндра в неподвижной идеальной среде

В дальнейшем цилиндр продолжает движение влево со скоростью  $V_\infty$ , а частица идеальной среды, замедлив скорость от  $V_\infty$  до нуля, переместилась из точки D в точку E1.

Частица идеальной среды из точки A2 переместилась в точку E2 за меньшее время, потому что эта частица ускорялась от нуля до скорости, меньшей, чем  $V_\infty$ , и скорость в верхней точке этой траектории меньше, чем  $-V_\infty$ .

Время перемещения частицы идеальной среды из точки А3 в точку Е3 еще меньше. Из точки А4 в точку Е4 частица переместилась еще быстрее. А частица из точки К осталась на месте, то есть никуда не перемещалась.

Таким образом равномерно движущийся в идеальной среде цилиндр перемещает все частицы идеальной среды за собой. На наибольшее расстояние перемещаются частицы, расположенные ближе к центру цилиндра (частица А1). Остальные частицы (А2, А3, А4) перемещаются на меньшие расстояния.

Но, если перемещения этих частиц происходят в горизонтальной плоскости, то никакая работа не совершается и не нужна дополнительная энергия для этих перемещений. Поэтому сила сопротивления движению цилиндра в идеальной среде равна нулю.

Учитывая однозначность решения кинематической задачи для стационарного течения, необходимо признать, что при увеличении скорости потока  $V_\infty$  максимальная скорость  $V_m$  также пропорционально увеличивается в соответствии с распределением (2). В нашем примере при обтекании круглого цилиндра несжимаемой идеальной средой максимальная скорость  $V_m$  в точках С1 и С2 (см. рис. 1.а) в 2 раза больше  $V_\infty$ .

Введем коэффициент :

$$a = \frac{V_m}{V_\infty} > 1 \quad (3)$$

Величина этого коэффициента определяется профилем обтекаемых твердых тел и может достигать больших величин, даже бесконечности.

Существование интегралов Бернулли, Коши, Бернулли-Эйлера [6,7] ставит для величины максимальной скорости  $V_m$  известный предел, превзойти который движущаяся идеальная среда не может без разрыва сплошности [7].

Если в некоторой точке линии тока заданы:  $z_\infty, V_\infty$  и  $p_\infty$ , то для любой точки этой линии тока текущие параметры:  $z, V$  и  $p$  определяются интегралом Бернулли:



$$\frac{p}{\rho \cdot g} = \frac{V_{\infty}^2}{2 \cdot g} + z_{\infty} + \frac{p_{\infty}}{\rho \cdot g} - \frac{V^2}{2 \cdot g} - z \quad (4)$$

Соотношение (4) показывает, что величина  $V$  не может оказаться чрезвычайно большой ни в одной точке линии тока, так как **давление  $p$  в идеальной среде не может быть отрицательным** [4,5,7]. Потому что моделью нулевого давления является вакуум, а что может быть меньше вакуума???

Для точек на одной высоте ( $z_{\infty} = z$ ) получаем неравенство:

$$\frac{V_{\infty}^2}{2 \cdot g} + \frac{p_{\infty}}{\rho \cdot g} - \frac{V^2}{2 \cdot g} > 0, \quad (5)$$

то есть давление  $p$  в любой точке должно оставаться положительным. Из этого неравенства находим предел для величины скорости  $V$  [4,5] :

$$V^2 < V_{\infty}^2 + \frac{2 \cdot p_{\infty}}{\rho} \quad (6)$$

Тогда предельное значение скорости потока  $V_{\infty}$ , удовлетворяющее неравенству (6), ограничено величиной:

$$(a \cdot V_{\infty})^2 < V_{\infty}^2 + \frac{2 \cdot p_{\infty}}{\rho}; \quad (7)$$

$$V_{\infty} < \sqrt{\frac{2 \cdot p_{\infty}}{(a^2 - 1) \cdot \rho}}, \quad (8)$$

где:  $a = V_m / V_{\infty}$  – коэффициент из соотношения (3).

Если, не меняя рис. 1.а, увеличить величину  $V_{\infty}$  до значения, большего, чем в соотношении (8), то в точках В и D давление увеличится до величины В” или D”, а в точках С1” и С2” давление будет отрицательным (смотри рис. 1.б – точечная пунктирная линия) [4,5]. Это указывает на абсурдность парадокса Д’Аламбера–Эйлера

Если постепенно сжимать круглый цилиндр (в точках В и D на рис. 1.а) до плоской поперечной пластины с острыми кромками на краях, то коэффициент

$a = V_m / V_\infty$  стремится к бесконечности. При этом за острой кромкой будет бесконечно большое отрицательное давление [4,5].

Поэтому при движении поперечной плоской пластины в идеальной среде **невозможно получить нулевое сопротивление ни для каких скоростей движения**. Для профилей с острыми кромками (а это не только поперечная плоская пластина, – это может быть квадратный или треугольный и многие другие профили) парадокс Д’Аламбера–Эйлера с нулевой силой сопротивления **является нереализуемой фикцией**.

Альтернативные модели стационарного обтекания твердых тел идеальной средой с вихреобразованием (модели Кирхгофа–Гельмгольца, Кармана и др.) не противоречат теоремам Кельвина (Томсона) и Лагранжа, и позволяют рассчитать силу сопротивления движению твердых тел в идеальной среде [4,5,6,7].

Если при стационарном движении твердого тела в идеальной среде присутствует сила сопротивления, то это означает, что для поддержания движения какой-либо внешний источник энергии непрерывно производит работу для преодоления силы сопротивления. В соответствии с законом сохранения энергии эта работа затрачивается на образование позади твердого тела вихрей, т.е. на увеличение общей кинетической энергии потока. Эти вихри уносятся потоком на бесконечность [4,5,6,7]. А для реальных жидкостей или газов, обладающих вязкостью, кинетическая энергия вихрей диссипируется (т.е. превращается в тепловую энергию) на конечном расстоянии позади твердого тела.

Уравнения движения идеальной среды допускают решения, в которых на поверхности обтекаемого идеальной средой твердого тела происходит, как говорят, **«отрыв струй»**: линии тока, следовавшие вдоль поверхности, в некотором месте «отрываются» от нее и уходят в глубь идеальной среды (модель Кирхгофа–Гельмгольца) [4,5,6,7].

В результате возникает картина течения, характеризующаяся наличием отходящих от тела **«поверхностей тангенциального разрыва»**, на которых скорость идеальной среды (будучи направлена в каждой точке по касательной к

этим поверхностям) терпит разрыв непрерывности. Другими словами, вдоль этих поверхностей один слой идеальной среды как бы скользит по другому (по «застойному» слою неподвижной среды позади тела) (рис. 3).

С математической точки зрения скачок тангенциальной составляющей скорости представляет собой поверхностный ротор скорости [4,5,6,7]. Подчеркнем, однако, что поверхность тангенциального разрыва, представляющая собой тонкий вихревой слой, – неустойчива [4,5,6,7]. Распадаясь на отдельные вихри, поверхности разрыва быстро «заполняют» застойную зону вихревыми движениями. Многочисленные наблюдения подтверждали наличие такой картины явления и привели к созданию теории вихревых дорожек Кармана [4,5,6,7].

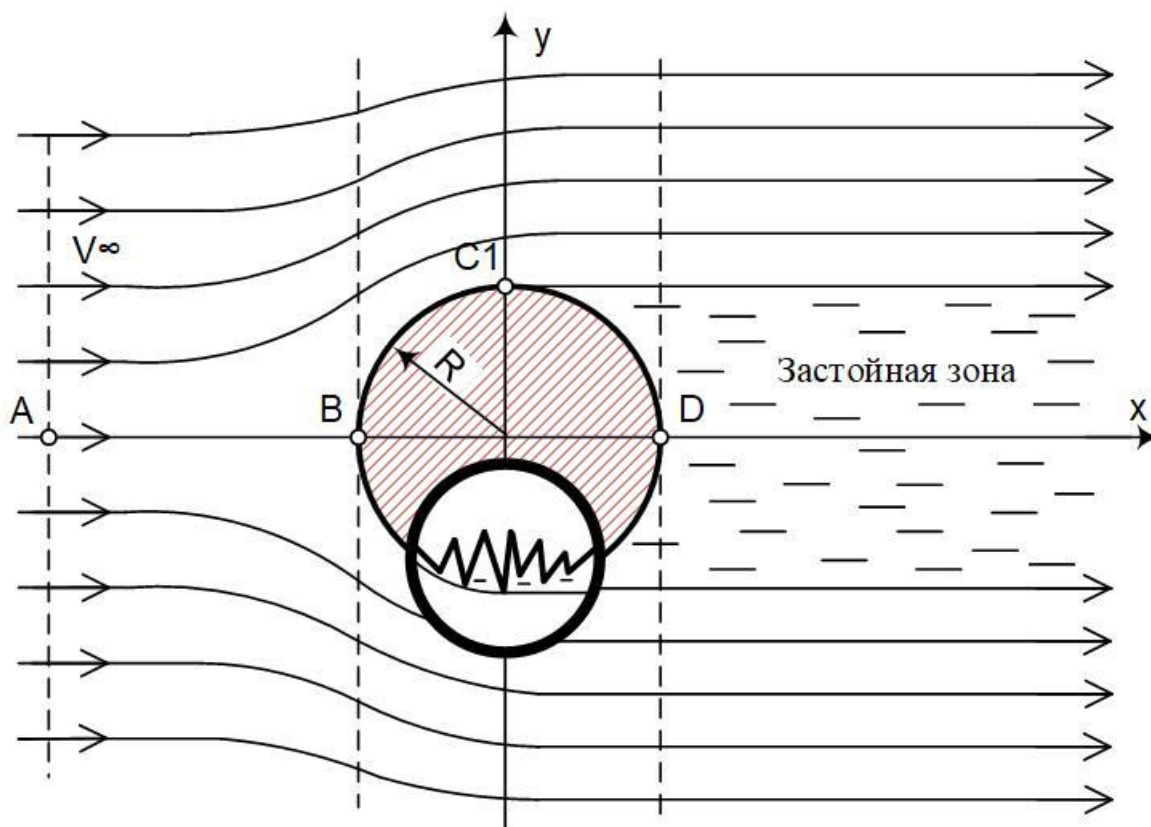


Рисунок 3 – Модель Кирхгофа–Гельмгольца обтекания твердого тела идеальной средой с отрывом струй

В нижней части цилиндра на рис. 3 условно изображена увеличительная лупа и увеличенное изображение шероховатой поверхности цилиндра. За

острыми кромками шероховатостей также образуются отрывы струй и небольшие застойные зоны. Самая нижняя кромка шероховатости поверхности определяет точку отрыва струи от цилиндра.

Наличие небольших застойных зон позади острых кромок шероховатостей поверхности цилиндра объясняет образование пограничного слоя при обтекании твердых тел вязкими жидкостями. Соседние струи движущейся вязкой жидкости взаимодействуют с этими застойными зонами (то есть с пограничным слоем) и вносят дополнительный вклад в величину силы сопротивления движению твердого тела.

Расчеты силы сопротивления на основе модели Кирхгофа–Гельмгольца при стационарном, установившемся движении твердого тела в идеальной среде приводят к результатам, совпадающим с экспериментальными измерениями [7]:

$$F = C * \rho * V_{\infty}^2, \quad (9)$$

где:  $F$  – сила сопротивления;

$\rho$  – плотность идеальной среды;

$C$  – множитель (имеющий размерность –  $m^2$ ), учитывающий форму и размеры обтекаемого тела.

Обычно гидродинамические силы  $F$ , действующие со стороны движущейся идеальной среды на твердое тело произвольной формы, выражают через их проекции [4,5,6,7] :

$$F = X_a * i + Y_a * j + Z_a * k, \quad (10)$$

где:  $i, j, k$  – единичные векторы вдоль осей координат;

$X_a$  – сила лобового сопротивления;

$Y_a$  – подъемная сила;

$Z_a$  – боковая сила.

Наряду с образованием силы лобового сопротивления, используя модель с вихреобразованием, можно также объяснить возникновение подъемной и боковой сил, как нормальных или ортогональных составляющих (относительно направления вектора скорости потока  $V_{\infty}$ ) силы сопротивления  $F$ .

Таким образом, подъемная сила возникает при стационарном обтекании идеальной средой несимметричных (относительно вектора скорости потока  $V_\infty$ ) твердых тел.

Известное условие Кутта о «закругленной передней кромке и острой задней кромке» – не нужно для возникновения подъемной или боковой силы. Да и сама теорема Жуковского-Кутта с фиктивным «присоединенным вихрем» – тоже не нужна для объяснения возникновения подъемной силы [8,9].

#### Выводы

1. Все доказательства парадокса Д'Аламбера–Эйлера, приведенные в учебниках [1,2,6,7], мягко говоря, некорректны, потому что еще до проведения расчетов на этапе выбора начальных условий о выравнивания параметров потока далеко впереди и позади тела – **закладывается нулевой конечный результат.**

Если поток идеальной среды, обтекающий твердое тело, окружить замкнутым контуром (охватывающим твердое тело), и внутри этого контура отсутствуют источники энергии или нет притока энергии извне, то, в соответствии с законами сохранения энергии и сохранения количества движения, внутри этой замкнутой поверхности невозможно силовое взаимодействие [4,5,6,7]. Потому что, допустив наличие силы сопротивления, необходимо признать, что на преодоление этой силы необходимо было бы затрачивать энергию от какого-то источника. Эта энергия приводит к изменению общей энергии потока, то есть к образованию вихрей позади твердого тела, поэтому параметры потока впереди твердого тела и позади его – не совпадают.

Поэтому нулевая сила сопротивления в парадоксе Д'Аламбера не является результатом теоретических расчетов, а есть следствием бессистемно, произвольно выбранных начальных условий, а также отказом учитывать физические ограничения на величину давления, которое не может быть отрицательным.

2. Альтернативные модели стационарного обтекания твердых тел идеальной средой с вихреобразованием (модели Кирхгофа–Гельмгольца, Кармана и др.) не противоречат теоремам Кельвина (Томсона) и Лагранжа,

учитывают физические ограничения на величину давления, и позволяют рассчитать силу сопротивления движению твердых тел в идеальной среде

3. Известная модель Жуковского-Кутта с фиктивным «присоединенным вихрем» противоречит фундаментальному закону сохранения энергии, а также в большинстве случаев приводит к решениям с отрицательными давлениями