

SECTION 7. INFORMATION TECHNOLOGIES

7.1 Інформаційна технологія відсікання неперспективних варіантів в алгоритмах рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними на основі рангового підходу

Розглянемо сутність рангового підходу до рішення задач цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) з булевими змінними (БЗ) на прикладі задачі про рюкзак. Загальна постановка цієї задачі формулюється таким чином. Необхідно знайти вектор $\vec{x}$, що доставляє максимум функції:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \times x_j, \quad (1)$$

при виконанні умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times x_j \leq b_i, \quad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad i = (\overline{1, m}); \quad j = (\overline{1, n}). \quad (3)$$

Для спрощення викладу математичної моделі розглянемо одновірну задачу, тобто максимізуємо функціонал

$$f(\vec{x}) = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \dots + c_n \times x_n, \quad (4)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} \times x_j \leq b, \quad (5)$$

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n; \quad a_{ij} > 0; \quad c_j > 0 \quad j = (\overline{1, n}). \quad (6)$$

Поставимо у відповідність задачі (4–6) граф G (рис. 1), що зображує бінарне дерево усіх рішень, число яких дорівнює 2^n [105-111].

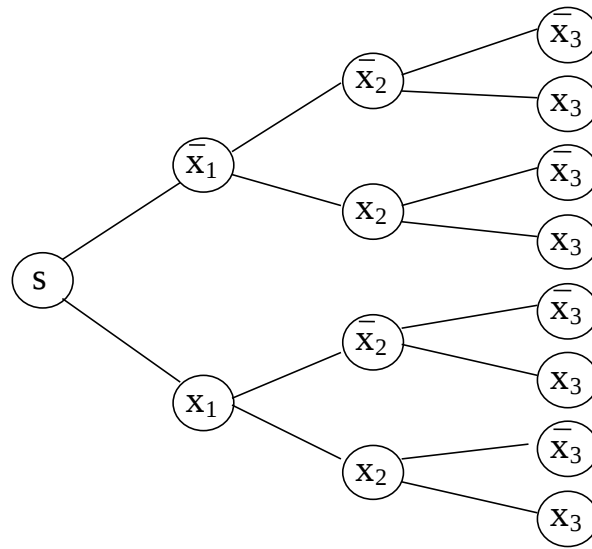


Рисунок 1. Граф G

Множина $X = \{x_j\}$ усіх векторів розмірності n , усі компоненти яких $x_j \in \{0, 1\}$ становлять множину можливих значень.

Деяка його підмножина V , усі вектори якої задовольняють обмеженням (5 – 6), утворюють множину припустимих рішень.

Множина $H \subset V$ є множиною оптимальних рішень вихідної задачі, якщо для будь-яких векторів $x \in H$ функціонал (4) досягає свого екстремального значення.

Усю множину можливих рішень можна розбити на групи векторів, що містять: один компонент $x_j = 1$, $j = (\overline{1, n})$ і всі інші рівні 0; два компоненти $x_j = 1$ і всі можливі їхні сполучення по 2, а інші, рівні 0; три компоненти $x_j = 1$ і всі можливі їхні сполучення й т. д. n – компонент $x_j = 1$. Якщо позначити підмножини векторів цих груп через m^r $r = (\overline{1, n})$, тоді множину усіх можливих рішень можна записати як об'єднання підмножин m^r :

$$X = \bigcup_{j=1}^n m^r. \quad (7)$$

Як показано в роботі [106], згідно з графом G можна побудувати граф G' (рис. 2), у якому множина шляхів рангу r (ранг шляху – число ребер, що утворюють шлях) відповідає групам підмножин, які описуються співвідношенням (7).

Для цього вершину s з'єднаємо спрямованими ребрами з вершинами $1, 2, \dots, n$ і т. д.; вершину i з'єднаємо з вершинами $i+1, \dots, n$. В останню вершину n

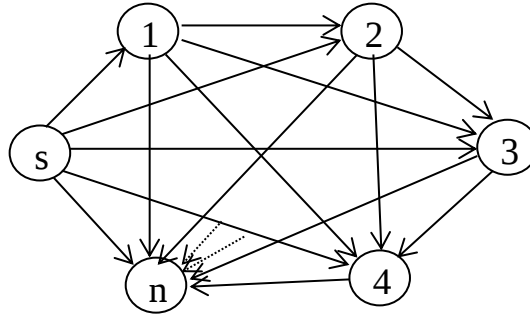


Рисунок 2. Граф G'

входять ребра, спрямовані із усіх вершин, і жодне ребро із цієї вершини не виходить.

Дерево шляхів $D\Delta$ графа G' з вершини s будується таким чином [105-109]: на нульовому ярусі ($r = 0$) розташуємо вершину s . На першому ярусі розмістимо всі вершини графа G' , що мають зв'язок з вершиною s і з'єднаємо їх з s (при цьому утворилася підмножина шляхів рангу $r = 1$). У другому ярусі розмістяться всі вершини, що мають зв'язок з вершинами першого ярусу, без вершини з номером 1 і з'єднаємо їх з вершинами першого ярусу (утворені всі шляхи рангу $r = 2$) і так далі доти, поки в останньому не залишиться одна вершина n . На рис. 3 наведено приклад, коли $n = 4$.

Геометрично вершина k графа $D\Delta$ рангу r – це множина векторів $\vec{x}$ ($x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$), у яких $x_k = 1$, а на позиціях від 1 до k перебуває r одиниць (рис. 4). Ребра, що входять у вершину k графа $D\Delta$, відповідає одиничний вектор $\vec{e}_k$ ($0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$) n -мірного одиничного куба B^n з одиницею в k -тій позиції. Тоді, шляху μ_{sj}^r рангу r у графі $D\Delta$ відповідає вектор $\vec{x}$, який дорівнює сумі одиничних векторів ребер, через які він досяг вершину j рангу r , починаючи з вершини s .

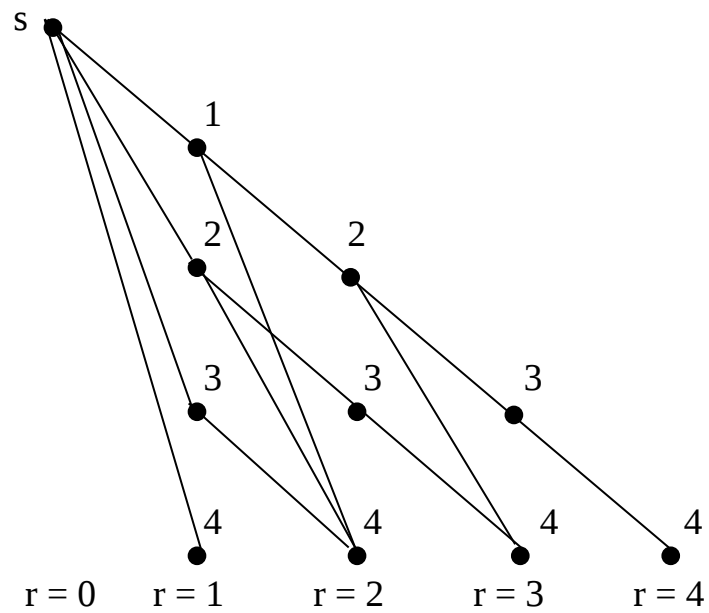


Рисунок 3. Граф $D \Delta$

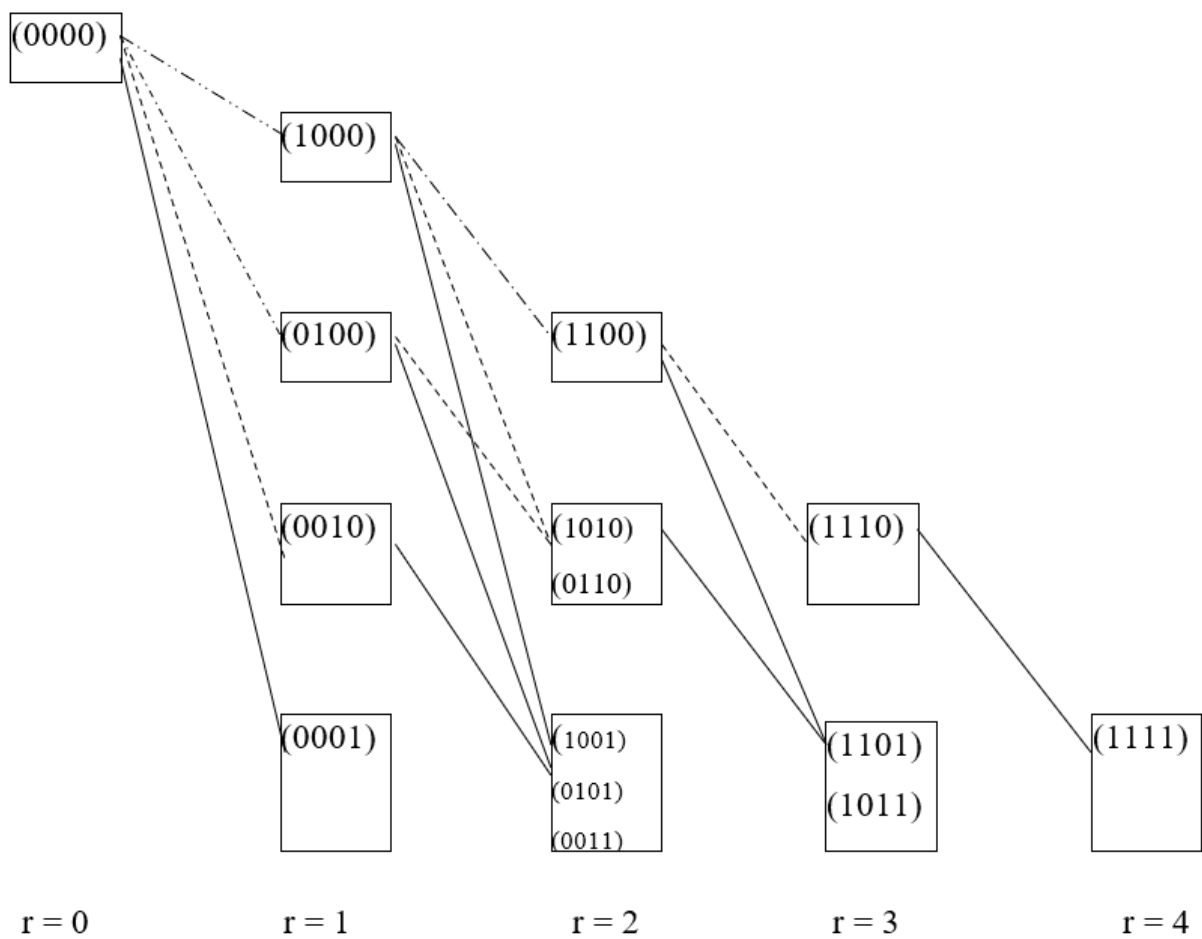


Рисунок 4. Геометрична інтерпретація графа $D \Delta$

Наприклад, шляху $\mu_{s24}^{r=2}$ відповідає вектор $\overrightarrow{x_{s24}}$, що утвориться сумою нульового вектора $\vec{0} \{0000\}$ і одиничних векторів $\vec{e}_2 = \{0100\}$, $\vec{e}_4 = \{0001\}$, тобто:

$$\overrightarrow{x_{s24}} = \vec{0} \{0000\} + \vec{e}_2 \{0100\} + \vec{e}_4 \{0001\} = \{0101\}$$

Нехай у графі $D\Delta$ кожному ребру, що входить у вершину j , $j = (\overline{1, n})$ відповідає дві ваги: вага c_j , якій дорівнює коефіцієнт при x_j у функціоналі (2.4), і вага a_{1j} , якій дорівнює коефіцієнту при x_j в обмеженні (5). Тоді, шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$ з вершини s у вершину j характеризується двома довжинами: $d_c(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за вагою функціонала й $d_a(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за вагою обмежень.

Множину шляхів $m_s^r(j)$ у графі $D\Delta$ до вершин j , розташовану на ярусах $r = (\overline{1, n})$ від вершини s , можна зобразити у вигляді

$$m_s^r(j) = m_{sj}^{r=1} \cup m_{sj}^{r=2} \cup \dots \cup m_{sj}^{r=n}, \quad j = (\overline{1, n}), \quad (8)$$

де m_{sj}^r – множина шляхів у графі $D\Delta$ від вершини s до вершин j , розташованих на r -х ярусах графа $D\Delta$ (ранг шляху $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ визначається числом ребер, що утворюють цей шлях). Варто мати на увазі, що множині шляхів $m_{sj}^{r=k}$ у графі $D\Delta$ відповідає множина векторів $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_v\}$, що містять k одиниць. Отже, $|m_{sj}^r| = C_n^{r=k}$, тобто кожному шляху в множині $m_{sj}^{r=k}$ відповідає деякий вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. З множини (2.8) слідує, що:

$$|m_s^r(j)| = C_n^{r=1} + C_n^{r=2} + \dots + C_n^{r=n} = 2^n - 1. \quad (9)$$

Таким чином, граф $D\Delta$ являє собою впорядкований за рангами еквівалент n -мірного одиничного куба B^n , у якому шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ відповідають вершинам B^n . Довжина кожного шляху за вагою функціонала визначає значення функціонала (4) у вершинах одиничного куба B^n . Довжина за вагою обмежень визначає, чи відповідає дана вершина B^n обмеженням (5), тобто належить вершина n -мірного одиничного куба B^n гіперплощини (5). Якщо $d_a(\mu_{sj}^r) \leq b$, то вершина належить гіперплощині (5), і будемо говорити, що шлях μ_{sj}^r

задовольняє властивості v . Якщо $d_a(\mu_{sj}^r)_1 > b$, то вершина n -мірного куба, що відповідає шляхам μ_{sj}^r , не належить гіперплощині (5), а шлях μ_{sj}^r вважаємо таким, який не задовольняє властивості v .

Оптимальному рішенню задачі (4 – 6) в ДЛ відповідає самий довгий шлях за вагою функціонала, що задовольняє властивості v .

У випадку m -мірної задачі (1 - 3) ребрам, що входять до вершин графа ДЛ, крім ваги c_j функціонала, відповідає m ваг a_{ij} обмежень, а шлях μ_{sj}^r характеризується довжинами: $d_c(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за вагою функціонала й $d_a(\mu_{sj}^r)_i$, $i = \overline{(1, m)}$ – довжинами за вагою m обмежень.

На основі математичної моделі рангового підходу для побудови алгоритмів рішення завдань ЦЛП із БЗ покладений принцип оптимізації у напрямку в дискретному просторі станів, заданому графом ДЛ [105-111]. Подання n -мірного одиничного куба у вигляді графа ДЛ дозволяє розбити множину усіх шляхів графа ДЛ з нульової вершини s на Ω локальних областей, де $|\Omega|$ не перевищує величину $\frac{n^2}{2}$, оскільки число вершин у графі ДЛ визначається сумою чисел натурального ряду

$$\Omega = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}, \quad (10)$$

причому Ω -області в графі ДЛ упорядковані за рангами і шляхи наступного рангу можуть бути отримані на основі шляхів попереднього рангу за рахунок приєднання до них ребра (j, p) у графі ДЛ: $m_{sp}^{r=r+1} = \{(\forall(\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r)) \cup (j, p)\}$.

Нехай задані деякі правила відсікання $\{L_w\}$ шляхів μ_{sj}^r у множинах m_{sj}^r . Тоді, якщо в множинах утримуються шляхи, що задовольняють властивості v і правилам $\{L_w\}$, то під *оптимізацією за напрямком* у графі ДЛ до вершини p будемо розуміти формування множин $m_{sp}^{r=r+1}$ наступного рангу, які виходять за рахунок виділення в m_{sj}^r шляхів, приєднання до яких ребрам (j, p) дозволить у

множині $m_{sp}^{r=r+1}$ одержати шляхи, що задовольняють правилам $\{L_w\}$ на основі наступного рекурентного співвідношення

$$\forall (\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r) [\mu_{sp}^{r=r+1} = L_w \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}] \quad p = (\overline{r+1}, n); \quad j = (\overline{r}, n), \quad (11)$$

де $\mu_{sj}^r \cup (j, p)$ – шлях з вершини s графа $D\Delta$ у вершину p , що проходить через проміжну вершину j і який задовольняє правилам $\{L_w\}$, тобто який одержуємо за рахунок приєднання до шляху μ_{sj}^r ребра (j, p) , якщо таке з'єднання не суперечить правилам $\{L_w\}$. Надалі для спрощення викладу, якщо шлях $\mu_{sp}^{r=r+1} = \mu_{sj}^r \cup (j, p)$ задовольняє правилам $\{L_w\}$, то будемо говорити, що він задовольняє й властивості v .

Таким чином, для рішення задачі (1 – 2), використовуючи правила $\{L_w\}$ і оптимізацію за напрямком (11), побудуємо деяку узагальнену процедуру A_0 , що дозволяє формувати множини локальних екстремумів Ω і виділяти серед них глобальний.

Уведемо узагальнену процедуру A_0 , що дозволяє на основі обраного правила відсікання $\{L_w\}$ вирішувати завдання (1 – 3).

Узагальнена процедура A_0

КРОК 1. З вершини s будуються множини шляхів $m_{sj}^{r=1}$, $j = (\overline{1}, n)$, що задовольняють властивості v . Виділяються шляхи $\mu_{sj}^{r=1}$, що визначають локальні екстремуми областей Ω_j .

КРОК 2. Формуються множини шляхів $m_{sp}^{r=r+1}$ $p = (\overline{r+1}, n)$ наступного рангу, що задовольняють властивості v , на базі множини шляхів m_{sj}^r попереднього рангу відповідно до рекурентного співвідношення (11). В утворених множинах $m_{sp}^{r=r+1}$ здійснюється відсікання шляхів відповідно до обраного правила відсікання $\{L_w\}$ і виділяються шляхи $\mu_{sp}^{r=r+1}$, що визначають локальні екстремуми областей Ω_p .

КРОК 3. Перевіряємо, чи всі множини $m_{sp}^{r=r+1}$ наступного рангу порожні. Якщо це так, то переходимо до кроку 4, якщо ні, то перевіряємо $r = (n - 1)$. У

випадку виконання рівності переходимо до кроку 4, інакше збільшуємо r на 1 і виконуємо крок 2.

КРОК 4. Виділяємо серед множин локальних екстремумів Ω_j $j = \overline{1, n^2/2}$ глобальний і процедура A_0 закінчує роботу.

Узагальнена процедура A_0 дозволяє визначити локальні екстремуми в Ω -областях графа $D\Delta$ щораз на кроці 2 і потім на кроці 4 виділити глобальний екстремум з $n^2/2$ локальних, які отримуються на основі принципу оптимізації за напрямком (11) з використанням правил відсікання, що вводять, $\{L_w\}$ шляхів у m_{sj}^r множинах.

Таким чином, із представленої математичної моделі n -мірного одиничного куба B^n у вигляді графа $D\Delta$ і сформульованого принципу оптимізації за напрямком на основі рангового підходу впливають наступні завдання:

1. Визначення стратегій відсікання $\{L_w\}$ безперспективних шляхів у множинах m_{sj}^r , що приводять до наближених і точних рішень задачі ЦЛП із БЗ (1–3).

2. Побудови наближених і точних алгоритмів на основі обраних правил відсікань $\{L_w\}$ для рішення одномірних і багатомірних задач ЦЛП із БЗ.

3. Створення паралельних обчислювальних структур як спеціалізованих пристроїв для рішення даного класу задач дискретної оптимізації.

В основу методу відсікання безперспективних варіантів для задачі (0,1) рюкзак покладемо множину стратегій $\{L_w\}$, застосування яких до узагальненої процедури A_0 приведе до побудови алгоритмів рішення цієї задачі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) з булевими змінними (БЗ).

Найбільш простою стратегією відсікання L_1 при формуванні $r=r+1$ шляхів наступного рангу в множинах $m_{sp}^{r=r+1}$, на основі процедури A_0 , є виділення в m_{sj}^r шляхів максимальної довжини за вагою функціонала c_j , довжини яких за вагою обмежень не перевищують величини b_i , тобто $d_a(\mu_{sj}^r)_i \leq b_i$. У цьому випадку шляхами, що задовольняють властивості v , будемо називати шляхи μ_{sj}^r , довжини

яких за вагою обмежень не перевищують величину b_i . Тоді, рекурентне співвідношення (11), що відповідає стратегії L_1 , приймає вигляд:

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \max_{c_j} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}, \quad p = (\overline{r+1}, n); \quad j = (\overline{r}, n), \quad (12)$$

Розглянемо приклад рішення задачі.

Приклад 1. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 20x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 4x_6 + 1x_7$$

при обмеженні

$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 4x_7 \leq 12,$$

у відповідності зі стратегією L_1 .

Рішення. Побудуємо граф $D\Delta$ (вершину s , що відповідає тривіальному рішенню задачі, показувати не будемо). Шлях μ_{sj}^r , $j = (\overline{r}, n)$ задається ідентифікатором, що визначає, через які вершини попередніх рангів він проходить (рис. 5). Наприклад, ідентифікатор $s146$ указує на шлях $\mu_{s146}^{r=3}$, що проходить через вершини $s \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ у графі $D\Delta$.

У дужках на першому місці стоїть довжина шляху за вагою функціонала, а далі m ваг по першому, другому, і т. д. m -му обмеженням. Так, запис " $s146(39,10)$ " відповідає шляху $\mu_{s146}^{r=3}$, що має $d_c(\mu_{s146}^{r=3}) = 39$, а $d_a(\mu_{sj}^r)_1 = 10$. Шлях μ_{sj}^r , що належить оптимальному рішенню, позначений "*".

s1(20,7) 1						
s2(18,2)* 2	s12(38,9) 2					
s3(18,5) 3	s13(38,12) s23(36,7)* 3					
s4(15,2) 4	s14(35,9) s24(33,4) s34(33,7) 4	s124(53,11) s234(51,9)* 4				
s5(10,3) 5	s15(30,10) s25(28,5) s35(28,8) s45(25,5) 5	s125(48,12) s235(46,10) s145(45,12) 5	s2345(61,12)* 5			
s6(4,1) 6	s16(24,8) s26(22,3) s36(22,6) s46(19,3) s56(14,4) 6	s126(42,10) s236(40,8) s146(39,10) s156(34,11) 6	s1246(57,12) s2356(50,11) 6			
s7(1,4) 7	s17(21,11) s27(19,6) s37(19,9) s47(16,6) s57(11,7) s67(5,5) 7	s237(37,11) s247(34,8) s257(29,9) s167(25,12) 7	s2367(41,12) 7			
r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7

* r=4

 $\mu_{s2345} \rightarrow \bar{x}^{\text{опт}} = (0111100).$ $f(\bar{x}^{\text{опт}}) = 61.$ Рисунок 5. Ілюстрація роботи стратегії L_1

Ітерація 1. Будуємо шляхи рангу $r = 1$, що задовольняють обмеженням задачі. Таких шляхів у графі DA – сім: $\mu_{s1}^{r=1} - \mu_{s7}^{r=1}$. Серед них вибираємо шлях з найбільшою довжиною за вагою функціонала: $\mu_{s1}^{r=1}$. Позначимо його $\mu_{s1}^{* r=1}$.

Ітерація 2. Будуємо шляхи рангу $r = 2$ відповідно до принципу оптимізації за напрямком (11) і стратегією L_1 (12). Наприклад, сформуємо шлях $\mu_{s13}^{r=2}$ на основі шляху $\mu_{s1}^{r=1}$, додаючи ребро (1,3). При цьому довжина шляху буде: за

вагою функціонала $d_c(\mu_{s13}^{r=2}) = 38$, а за вагою обмеження $d_a(\mu_{s13}^{r=2})_1 = 12$, тобто шлях $\mu_{s13}^{r=2}$ задовольняє обмеженню завдання й властивості v .

Аналогічно будуються інші шляхи рангу $r = 2$. Потім серед усіх шляхів рангу 2 вибираємо шлях з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{sj}^{r=2})$. Це шляхи $\mu_{s12}^{r=2}$ і $\mu_{s13}^{r=2}$.

Ітерація 3. Будуємо шляхи рангу $r = 3$ на основі шляхів рангу $r = 2$ і оптимізацією за напрямком. При додаванні до шляху $\mu_{s12}^{r=2}$ ребра (2,3) утвориться шлях $\mu_{s123}^{r=3}$, довжина якого за вагою обмежень $d_a(\mu_{s123}^{r=3})_1 = 14$, що не задовольняє умові завдання. Тому такий шлях не показаний. Якщо в множині $m_{sj}^{r=2}$ кілька шляхів, більший з яких при приєднанні якого-небудь ребра не задовольняє властивості v , то згідно з правила (11) вибираємо наступний шлях, що належить цій множині, але менший за вагою функціонала. На $r = 2$ рис. 5 це можна спостерігати при побудові шляху з множини $m_{s3}^{r=2}$ в $m_{s3}^{r=3}$. Серед усіх шляхів рангу 3 вибираємо шлях з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{sj}^{r=3})$. Це шлях: $\mu_{s124}^{r=3}$.

Ітерація 4. Будуємо шляхи рангу $r = 4$, аналогічно описаним в ітерації 3. Серед усіх шляхів рангу 4 також вибираємо шлях з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{sj}^{r=4})$. Це шлях $\mu_{s2345}^{r=4}$.

Ітерація 5. Будуємо шляхи рангу $r = 5$. Як видно з рис. 2.5, шляхів, що задовольняють умові завдання рангу $r = 5$ немає. Тоді із усіх шляхів $\mu_{sj}^{r=5}$, $r = (\overline{1,4})$, $j = (\overline{r,n})$ – вибираємо найбільший: $\mu_{s2345}^{r=5}$, а вектор $\vec{x}^{opt} = (0111100)$, йому відповідний, є оптимальним рішенням задачі.

Використання стратегії L_1 не завжди дає оптимальне рішення задачі. Виникнення ситуації відсівання шляхів за співвідношенням (12), що відповідають оптимальному рішення задачі обумовлене тим, що шляхи з більшим значенням щодо функціонала можуть набирати й більшу довжину за вагою обмежень. Отже, на деякому ранзі виникає ситуація, коли через обмеження шляхи наступних рангів у графі ДЛ побудувати неможливо, а шляхи

з меншим значенням довжини за вагою функціонала, що мають і меншу довжину за вагою обмежень, відкинуті по стратегії L_1 . На їхній основі могли б бути отримані шляхи більшого рангу, а за рахунок цього – й більшої величини за вагою функціонала.

Позначимо через $\mu_{sj=\gamma}^{** r=q}$ шлях рангу $r = q$ з найбільшою довжиною $d_c\left(\mu_{sj}^{** r}\right)$ серед шляхів $\left\{\mu_{sj}^{* r<q}\right\}$ рангу $r < q$, що відповідають локальним екстремумам, обумовленим процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 . Тоді сформулюємо правило відсівання L_2 для одномірної задачі, на основі наступної теореми.

Теорема 1. У графі $D\Delta$ не існує шляху, що задовольняє властивості v , рангу $r < q$, для якого виконується нерівність

$$d_c\left(\mu_{sj}^{* r<q}\right) < d_c\left(\mu_{sj=\gamma}^{** r=q}\right).$$

Доказ. На кожному етапі формування множини шляхів $m_{sp}^{r=r+1}$ $p = (\overline{r}, n)$ процедурою A_0 , що використовує правило L_1 , у цих множинах будуються шляхи $\mu_{sp}^{r=r+1}$, задовольняючі властивості v , відповідно до співвідношення (12).

Припустимо, що в $D\Delta$ існує шлях $\mu_{sj=k}^{- r<q}$, довжина якого $d_c\left(\mu_{sj=k}^{- r<q}\right) < d_c\left(\mu_{sj=\gamma}^{** r=q}\right)$, й він задовольняє властивості v . Існування такого шляху можливо, якщо існують

шляхи $\left\{\mu_{sj}^{- r<q}\right\}$, що задовольняють властивості v , довжини яких $d_c\left(\mu_{sj}^{- r<q}\right)$

перевищують довжини шляхів $d_c\left(\mu_{sj}^{* r<q}\right)$, відповідних локальним екстремумам,

виділеним процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 . Покажемо, що дане припущення невірне. Для цього доведемо наступне твердження.

Твердження 1. Процедура A_0 з використанням стратегії L_1 дозволяє визначати в графі $D\Delta$ шляхи рангу $r < q$ максимальної довжини за вагою функціонала, що задовольняють властивості v , від вершини s до усіх інших вершин графа $D\Delta$.

Якщо вірно твердження 1, то значить не існує шляхів $\mu_{sj}^{r < q}$, що задовольняють нерівності $d_c\left(\mu_{sj}^{r < q}\right) > d_c\left(\mu_{sj}^{* r < q}\right)$, й, отже, припущення про існування шляху $\mu_{sj=k}^{r < q}$, для якого виконується нерівність $d_c\left(\mu_{sj=k}^{r < q}\right) > d_c\left(\mu_{sj}^{** r=q}\right)$, теж невірна й тоді теорема доведена.

Правомірність твердження 1 для множин $m_{sj}^{r=1}$, $m_{sj}^{r=2}$ очевидна, оскільки множини $m_{sj}^{r=1}$ містять по одному шляху рангу $r = 1$, а в множинах $m_{sj}^{r=2}$ утримуються всі шляхи $\mu_{sj}^{r=2}$ рангу $r = 2$ графа ДД. Нехай на основі множин $m_{sj}^{r=2}$ і $j = \overline{(r, n)}$ процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 сформовані множини

$$* r=3$$

$m_{sj}^{r=3}$. Виділимо в $m_{sj}^{r=3}$ шляхи μ_{sj} максимальної довжини за вагою функціонала.

$$** r=3$$

Припустимо, що в графі ДД існує шлях μ_{sj} , який задовольняє властивості v ,

$$* r=3$$

але більш довгий, ніж μ_{sj} . Відповідно до рекурентного співвідношення (12)

останнє можливо, якщо в множинах $m_{sj}^{r=2}$ є шляхи $\mu_{sj}^{* r=2}$ більш довгі, ніж шляхи

$$* r=2$$

$\mu_{sj}^{* r=2}$. Але це суперечить раніше встановленому факту, що шляхи μ_{sj} самі довгі

$$** r=3$$

шляхи рангу $r = 2$ у графі ДД. Отже, припущення про існування шляху μ_{sj} невірно, а значить твердження 1 справедливо й для множин $m_{sj}^{r=3}$.

Припустимо, що воно виконується й для $m_{sj}^{r=k < q}$, і доведемо, що воно вірно й для множин $m_{sj}^{r=k+1}$. Нехай на базі множини шляхів $m_{sj}^{r=k}$ процедура A_0 , яка використовує стратегію L_1 , побудувала множини шляхів $m_{sj}^{r=k+1}$. Виділимо в

$$* r=k+1$$

множинах $m_{sj}^{r=k+1}$ шляхи максимальної довжини μ_{sj} й, припустимо, що в графі

$$** r=k+1$$

ДД існує шлях μ_{sj} , який задовольняє властивості v , але довший $\mu_{sj}^{* r=k+1}$. Останнє

$$* r=k+1$$

можливо, якщо існує шлях $\mu_{sj}^{** r=k}$ більш довгий, ніж $\mu_{sj}^{* r=k}$, але який задовольняє властивості v . Однак це суперечить первісному припущенню про те, що шляхи

* $r=k$
 μ_{sj} самі довгі шляхи рангу $r = k$ у графі $D\Delta$, і, отже, допущення про існування шляху μ_{sj} в $D\Delta$ $r = k + 1$ невірне, тобто твердження 1 справедливо й для множин $m_{sj}^{r=k+1}$.

Отже, ми показали, що твердження 1 вірно для множин $m_{sj}^{r=1}$, $m_{sj}^{r=2}$ і довели, що воно виконується для $m_{sj}^{r=3}$. Далі було припущено, що воно поширюється й на множину $m_{sj}^{r=k}$ й доведено, що у випадку правильності припущення, твердження 1 справедливо й для множин рангу $r = k + 1$.

Таким чином, на основі принципу повної математичної індукції твердження 1 справедливо й для довільних множин $m_{sj}^{r<q}$, тому що при $r > q$ множина шляхів $m_{sj}^{r<q}$ порожня й, виходить, теорема 1 вірна.

З доведеної теореми 1 слідує стратегія відсікання L_2 , що дозволяє значення функціонала шляху μ_{sj} використовувати як верхню оцінку для відсікання шляхів у множинах $m_{sj}^{r<q}$ графа $D\Delta$. Стратегія L_2 використовується при побудові багатоетапних алгоритмів, тому приклад, що пояснює роботу стратегії L_2 , буде розглянутий пізніше.

Не порушуючи стратегій L_1 і L_2 , можна ввести додаткове відсікання в множинах шляхів m_{sj}^r , що зображує стратегію L_3 , яка заснована на властивості графа $D\Delta$ і полягає в наступному. Зі структури графа $D\Delta$ видно, що для кожної його вершини j , яка відповідає області Ω_j , вага γ_j дорівнює сумі коефіцієнтів c_j у функціоналі (2.4), обумовлена за правилом:

$$\gamma_j = c_{j+1} + c_{j+2} + \dots + c_n, \quad \gamma_n = 0; \quad j = \overline{(1, n-1)}, \quad (13)$$

представляє верхню оцінку збільшення величини значення локального екстремума в області Ω_j на усіх наступних рангах. Скорочення числа

формованих шляхів μ_{sj}^r у множинах m_{sj}^r може бути досягнуто, якщо виконуються умови, обумовлені наступним досить очевидним твердженням 2.

Твердження 2. Якщо сума довжини шляху $d_c(\mu_{sj}^r)$ з підмножини r m_{sj}^r у вершину w і вага γ_w цієї вершини менша за вже отриману максимальну довжину $d_c(\mu_{sj=p}^r)$, то шляхи наступного рангу, побудовані на основі μ_{sj}^r , не можуть визначати оптимальне рішення задачі.

Справедливість твердження 2 слідує з того, що процедура A_0 зі стратегією L_1 вибирає глобальний екстремум із усіх локальних, а найбільша довжина за рахунок продовження шляху μ_{sj}^r вже менша одного з локальних екстремумів.

Таким чином, перевірка умови:

$$d_c(\mu_{sp}^r) + \gamma_p < \max_{\{c_j\}} \left\{ d_c \left(\mu_{sp}^{*r} \right) \right\}, \quad (14)$$

де $d_c(\mu_{sp}^r)$ – довжина шляху μ_{sp}^r до вершини p рангу r за вагою c_j ; дозволяє виключити цей шлях з подальшого аналізу, як безперспективний, якщо умова виконана. На цій перевірці заснована стратегія L_3 .

Приклад 2. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 20x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 4x_6 + 1x_7$$

при обмеженні

$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 4x_7 \leq 12$$

у відповідності зі стратегією L_1 і L_3 .

Рішення. Ілюстрація рішення приводиться на рис. 6. Тут і далі підкреслення шляху означає те, що тільки на основі цього шляху відбувається побудова множин наступного рангу, інакше шлях виключається з подальшого аналізу. Ліворуч у вигляді стовпця проставлене значення γ_j , $j = (\overline{1,7})$ (13), обумовлене для кожної вершини графа ДД. Так, наприклад $\gamma_3 = c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 15 + 10 + 4 + 1 = 30$.

γ_j							
66	<u>s1(20,7)</u> 1						
48	<u>s2(18,2)*</u> 2	<u>s12(38,9)</u> 2					
30	<u>s3(18,5)</u> 3	<u>s13(38,12)</u> <u>s23(36,7)*</u> 3					
15	<u>S4(15,2)</u> 4	<u>s14(35,9)</u> <u>s24(33,4)</u> <u>s34(33,7)</u> 4	<u>s124(53,11)</u> <u>s234(51,9)*</u> 4				
5			<u>s125(48,12)</u> 5	<u>s2345(61,12)*</u> 5			
1							
0							
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	r = 7

$$* r=4$$

$$\mu_{s2345} \rightarrow \vec{x}^{onm} = (0111100).$$

$$f(\vec{x}^{onm}) = 61$$

 Рисунок 6. Ілюстрація роботи стратегії L_1 і L_3

Відмінною рисою від прикладу 2 є наявність порожніх множин m_{sj}^r . Це обумовлено застосуванням відсікання за умови (14). Наприклад, побудуємо шлях $\mu_{s15}^{r=2}$. До цього часу $\max \left\{ d_c \left(\mu_{s12}^{* r=2} \right) \right\} = 38$, а $d_c(\mu_{s12}^{r=2}) = 30$. Тоді $d_c(\mu_{s15}^{r=2}) + \gamma_5 = 35$.

Отже, на основі шляху $\mu_{s15}^{r=2}$, згідно з твердженням 2, неможливо побудувати шляхи, що перевищують за вагою функціонала значення вже існуючого локального екстремуму: шляхи $\mu_{s12}^{* r=2}$. В іншому порядок рішення не змінився в порівнянні із прикладом 1.

Як видно із прикладу 2, спільне застосування стратегій L_1 і L_3 дозволяє в 3 рази зменшити число векторів, що будуються в множинах m_{sj}^r , у порівнянні із застосуванням однієї стратегії L_1 .

У результаті роботи процедури A_0 зі стратегіями L_1, L_3 залишаються множини m_{sj}^r , для яких $r > q$ (у прикладах 1 і 2 вони є порожніми), а для ефективної фільтрації безперспективних шляхів необхідно мати оцінки значення функціонала в областях Ω_j , $j = (\overline{1, n^2/2})$ при $r > q$. Для цього введемо стратегію вибору шляхів з множини L_4 , що ґрунтується на процедурі, яка дозволяє одержати шляхи максимально можливого рангу r у графі ДД. Її можна реалізувати, якщо в ДД визначати найкоротші шляхи за вагою обмежень на основі процедури A_0 між вершиною s і всіма іншими вершинами графа ДД, при цьому рекурентне співвідношення (11) для одомірної задачі (4 – 6) прийме наступний вигляд.

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \min_{a_{ij}} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}; \quad p = (\overline{r+1, n}); \quad j = (\overline{r, n}), \quad i = 1. \quad (15)$$

Неважко побачити, що при цій стратегії формування шляхів у множинах m_{sj}^r залишається справедливим твердження 2 і для відсівання шляхів у множинах m_{sj}^r можна використовувати умову (14).

Приклад 3. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30,$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_4 (рис. 7).

Рішення. З кожної множини m_{sj}^r для подальшого аналізу вибираються шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$, що мають мінімальне значення за вагою $d_a(\mu_{sj}^r)$. Такі шляхи на рис. 2.7 підкреслені. Інші – виключаються з подальшого аналізу за умовою (15).

На ранзі $r = 4$ у множині $m_{s6}^{r=4}$ шлях $\mu_{s1246}^{r=4}$, що лежить в основі оптимального, губиться через те, що існує шлях $\mu_{s2456}^{r=4}$ менший за вагою функціонала й менший за вагою обмеження. Слід зазначити також, що для даного прикладу

застосування стратегій L_3 і L_4 не дає оптимального рішення задачі. Так,

$$*r=6$$

отриманий шлях $\mu_{s245678}$ не є оптимальним, тому що останній був відкинутий

на ранзі $r = 4$ у множині $m_{s6}^{r=4}$ із зазначеної вище причини.

γ_i							
197	<u>s1(47,10)*</u>						
	1						
152	<u>s2(45,4)</u>	<u>s12(92,14)*</u>					
	2	2					
114	<u>s3(38,10)</u>	<u>s13(85,20)</u>	<u>s123(130,24)</u>				
		<u>s23(83,14)</u>					
	3	3	3				
82	<u>s4(32,8)</u>	<u>s14(79,18)</u>	<u>s124(124,22)*</u>				
		<u>s24(77,12)</u>	<u>s234(115,22)</u>				
		<u>s34(70,18)</u>					
	4	4	4	4			
60	<u>s5(22,9)</u>	<u>s15(69,19)</u>	<u>s125(114,23)</u>				
		<u>s25(67,12)</u>	<u>s235(105,23)</u>				
		<u>s35(60,19)</u>	<u>s245(99,21)</u>				
		<u>s45(54,17)</u>					
	5	5	5	5	5		
38	<u>s6(22,5)</u>	<u>s16(69,15)</u>	<u>s126(114,19)</u>	<u>s1236(152,29)</u>			
		<u>s26(67,9)</u>	<u>s236(105,19)</u>	<u>s1246(146,27)*</u>			
		<u>s36(60,15)</u>	<u>s246(99,17)</u>	<u>s2456(121,26)</u>			
		<u>s46(54,13)</u>					
	6	6	6	6	6	6	6
18			<u>s127(112,15)</u>		<u>s24567(141,27)</u>		
	7	7	7	7	7	7	7
0						<u>s245678(159,28)</u>	
	8	8	8	8	8	8	8
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	

$$*r=6$$

$$\mu_{s124678} \rightarrow \bar{x}^{\text{опт}} = (11010111).$$

$$f(\bar{x}^{\text{опт}}) = 184, \quad k = 3.$$

Рисунок 7. Ілюстрація роботи стратегій L_3 і L_4

Реалізація процедури A_0 з урахуванням стратегій L_3 , L_4 дозволяє сформулювати додаткову стратегію L_5 відсікання безперспективних шляхів у множинах m_{sj}^r , обумовлену наступною теоремою 2.

Теорема 2. Якщо з множини $m_{sj}^r, j = (\overline{r_{\max}, n})$, максимального рангу $r_{\max}$, побудованого процедурою A_0 зі стратегіями L_3, L_4 , вибрати шлях μ_{sw}^r з найбільшим значенням за вагою функціонала c_j , то у випадку повторного рішення вихідного завдання досить формувати шляхи першого рангу $r = 1$ у множині $m_{sp}^r, p = (\overline{1, k})$, де:

$$k = w - r_{\max} + 1, \quad (16)$$

а w -номер множини m_{sw}^r зі шляхом максимальної довжини за вагою функціонала, обумовлений при першому рішенні завдання.

Доказ. Припустимо, що існує шлях $\mu_{sp}^{*r} (p > k)$, який досягає значення максимального рангу $r_{\max}$. Оскільки $p > k$, то шлях μ_{sp}^{*r} у графі ДЛ буде проходити по нижніх вершинах (рис. 3). Але ваги c_j , згідно з обмеженням (6), відсортовані в порядку убутання й, вершинам, що перебувають на більш низьких горизонтальних лінійках, в ДЛ відповідають і менші ваги за функціоналом.

Тому на кожному ранзі шлях μ_{sp}^{*r} зможе набрати не більш, ніж шлях μ_{sw}^r , а, отже, він і в сумі набере за вагою $\{c_j\}$ довжину не більшу, ніж μ_{sw}^r . Що було потрібно довести.

Відповідно до стратегії відсікання L_5 , у випадку повторного рішення задачі (приклад 3) яким-небудь алгоритмом, будувати вектори множин з $m_{s4}^{r=1}$ по $m_{s8}^{r=1}$ не потрібно, тому що кінцевою вершиною шляху максимального рангу $\mu_{s256788}^{r=6}$ є вершина $w = 8$. Ранг цього шляху дорівнює $r_{\max} = 6$, згідно за формулою (16) $k = 3$, а виходить, що будувати шляхи першого рангу необхідно тільки в $m_{s1}^{r=1}, m_{s2}^{r=1}, m_{s3}^{r=1}$.

Найбільш важливою стратегією L_6 є стратегія, заснована на понятті виділення коридору в множинах m_{sj}^r , що дозволить будувати точні алгоритми рішення завдання (4 – 6). Оскільки нумерація змінних і вершин у графі ДЛ відповідає порядку убутання коефіцієнтів c_j у функціоналі, а процедура A_0 на

кожному етапі формує множини m_{sj}^r , починаючи з індексів $j = (\overline{r, n})$, то шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ виявляться завжди відсортованими в порядку убуття довжин за вагою функціонала.

У вигляді теореми 3 сформулюємо правило, що дозволяє в множині m_{sj}^r виділити шлях $\bar{\mu}_{sj}^r$ з довжиною $d_c(\bar{\mu}_{sj}^r)$, стосовно якої всі шляхи з меншим значенням довжини за вагою функціонала можуть бути виключені з аналізу як неперспективні.

Теорема 3. Якщо відсортувати в множині $m_{sj}^r, j = (\overline{r, n})$ рангу r вектора в порядку убуття за вагою функціонала c_j , то шляхи, в яких довжина $d_c(\mu_{sj}^r)$ менше довжини $d_c\left(\min_{a_{ij}} \mu_{sj}^r\right)$, не можуть визначати оптимальне рішення задачі.

Доказ. Припустимо, що на основі шляху μ_{sj}^r з множини m_{sj}^r , в якого довжина $d_c\left(\mu_{sj}^r\right)$ менше, ніж довжина $d_c\left(\min_{a_{ij}} \mu_{sj}^r\right)$, вдалося побудувати оптимальне рішення завдання (8 – 11). Тоді в множині $m_{sp}^{r=r+1}, p = (\overline{r, n})$ наступного рангу повинен потрапити шлях і мінімальний за вагою обмежень, адже він тим більше буде задовольняти властивості v . Однак, довжина за вагою функціонала в такого шляху буде більша, ніж в μ_{sj}^r і, отже, припущення про існування μ_{sj}^r невірне, а цей шлях виключити з подальшого аналізу, що й було потрібно довести.

Приклад 4. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_6 .

Рішення. Побудова шляхів наступного рангу буде здійснюватися на основі шляхів попереднього рангу. Усі шляхи, на основі яких і відбувається така побудова, виділені підкресленням (рис. 8).

γ_j						
197	<u>s1(47,10)*</u>					
	1					
152	<u>s2(45,4)</u>	<u>s12(92,14)*</u>				
	2	2				
114	<u>s3(38,10)</u>	<u>s13(85,20)</u>	<u>s123(130,24)</u>			
		<u>s23(83,14)</u>				
	3	3	3			
82	<u>s4(32,8)</u>	<u>s14(79,18)</u>	<u>s124(124,22)*</u>			
		<u>s24(77,12)</u>	<u>s134(117,28)</u>			
		<u>s34(70,18)</u>	<u>s234(115,22)</u>			
	4	4	4	4		
60	<u>s5(22,9)</u>	<u>s15(69,19)</u>	<u>s125(114,23)</u>			
		<u>s25(67,12)</u>	<u>s135(107,29)</u>			
		<u>s35(60,19)</u>	<u>s235(105,23)</u>			
		<u>s45(54,17)</u>	<u>s145(101,27)</u>			
		<u>s245(99,21)</u>				
	5	5	5	5	5	
38	<u>s6(22,5)</u>	<u>s16(69,15)</u>	<u>s126(114,19)</u>	<u>s1236(152,29)</u>		
		<u>s26(67,9)</u>	<u>s136(107,25)</u>	<u>s1246(146,27)*</u>		
		<u>s36(60,15)</u>	<u>s236(105,19)</u>	<u>s1256(136,28)</u>		
		<u>s46(54,13)</u>	<u>s146(101,23)</u>	<u>s2356(127,28)</u>		
		<u>s246(99,17)</u>	<u>s2456(121,26)</u>			
	6	6	6	6	6	6
18			<u>s127(112,15)</u>	<u>s1237(150,25)</u>	<u>s12367(172,30)</u>	
				<u>s1247(144,23)</u>	<u>s12467(166,28)*</u>	
				<u>s1257(134,24)</u>	<u>s12567(156,29)</u>	
				<u>s1267(134,20)</u>		
	7	7	7	7	7	7
0						<u>s124678(184,29)</u>
	8	8	8	8	8	8
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6

$$* r=6$$

$$\mu_{s124678} \rightarrow \vec{x}^{onm} = (11010111).$$

$$f(\vec{x}^{onm}) = 184.$$

Рисунок 8. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_6

Так, наприклад, у множині $m_{s5}^{r=2}$ шляху $\mu_{s35}^{r=2}$, $\mu_{s45}^{r=2}$ виключаються з подальшого розгляду, тому що згідно з теоремою 3 існує шлях $\mu_{s25}^{r=2}$ у вершину 5 більший за вагою функціонала й менший за вагою обмежень.

На відміну від прикладу 3, застосування стратегій L_3 і L_6 дозволяє точно рішити дану (і будь-яку іншу) задачу.

Теорема 3 визначає поняття коридору.

Визначення. Під *одномірним коридором* з множини m_{sj}^r в множину $m_{sp}^{r=r+1}$ будемо розуміти сукупність шляхів μ_{sj}^r , які перебувають між верхньою границею множини m_{sj}^r і його нижньою границею, що задовольняють властивості v у множині $m_{sp}^{r=r+1}$. Верхня границя визначається шляхом з максимальною $d_c(\mu_{sj}^r)$, а нижня – теоремою 3.

Виходячи з поняття коридору, можна запропонувати наступну стратегію L_7 , яка являє собою ще одну стратегію вибору шляхів, що r полягає в тому, щоб з множини m_{sj}^r рангу r у множині $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = (\overline{r, n})$, наступного рангу вибирати шляхи, що задовольняють властивості v і є максимальними за вагою функціонала c_j і мінімальним за вагою обмежень a_{1j} , що відповідає рекурентним співвідношенням (12), (15).

Приклад 5. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 50x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 41x_4 + 37x_5 + 36x_6 + 31x_7 + 27x_8$$

при обмеженні

$$9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 1x_8 \leq 27$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_7 (рис. 9).

Рішення. Даний приклад розкриває поняття одномірного коридору, тобто під коридором у множині $m_{s5}^{r=3}$ мається на увазі підмножина векторів, що складається зі шляхів $\mu_{s125}^{r=3}$, $\mu_{s135}^{r=3}$, $\mu_{s235}^{r=3}$, а відповідно до стратегії L_7 для подальшого аналізу беруться тільки два шляхи $\mu_{s125}^{r=3}$ та $\mu_{s235}^{r=3}$, які підкреслені. Інші виключаються з множини $m_{s5}^{r=3}$. Аналогічно будуються множини шляхів усіх рангів.

Розглянемо тепер правила фільтрації безперспективних шляхів усередині виділеного коридору, починаючи зі стратегії L_8 , заснованої на твердженні 3.

γ_j								
267	<u>s1(50,9)</u> 1							
217	<u>s2(50,7)*</u> 2	<u>s12(100,16)</u> 2						
172	<u>s3(45,6)</u> 3	<u>s13(95,15)</u> <u>s23(95,13)*3</u>	<u>s123(145,22)</u> 3					
131	<u>s4(41,9)</u> 4	<u>s14(91,18)</u> <u>s24(91,16)</u> <u>s34(86,15)</u>	<u>s124(141,25)</u> <u>s134(136,24)</u> <u>s234(136,22)</u>	4				
94	<u>s5(37,6)</u> 5	<u>s15(87,15)</u> <u>s25(87,13)</u> <u>s35(82,12)</u> <u>s45(78,15)</u>	<u>s125(137,22)</u> <u>s135(132,21)</u> <u>s235(132,19)*</u> <u>s145(128,24)</u> <u>s345(123,21)</u>	5	5			
58	<u>s6(36,6)</u> 6	<u>s16(86,15)</u> <u>s26(86,13)</u> <u>s36(81,12)</u> <u>s46(77,15)</u> <u>s56(73,12)</u>	<u>s126(136,22)</u> <u>s136(131,21)</u> <u>s236(131,19)</u> <u>s146(127,24)</u> <u>s156(123,21)</u> <u>s346(122,21)</u> <u>s356(118,18)</u>	6	6	<u>s2356(168,25)*</u>	6	6
27	<u>s7(31,5)</u> 7	<u>s17(81,14)</u> <u>s27(81,12)</u> <u>s37(76,11)</u>	<u>s127(131,21)</u> <u>s137(126,20)</u> <u>s237(126,18)</u> <u>s147(122,23)</u> <u>s157(118,20)</u>	7	7	<u>s1237(176,27)</u> <u>s1257(168,27)</u> <u>s2347(167,27)</u> <u>s1267(167,27)</u> <u>s2357(163,24)</u> <u>s3567(149,23)</u>	7	7
0	8	8	8	8	8	<u>s23568(195,26)*</u>	8	8
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5			

$$* r=5 \rightarrow \vec{x}^{onm} = (01101101).$$

$$f(\vec{x}^{onm}) = 195.$$

 Рисунок 9. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_7

Твердження 3. Якщо в коридорі існують два шляхи – $\mu_{sj} \in m_{sj}^{*r}$ й $\mu_{sj} \in m_{sj}^{**r}$

– для яких $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) > d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$ т $d_a\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \leq d_a\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$, то вектор $\vec{x}$, що відповідає

шляху μ_{sj}^{*r} не може належати оптимальному рішенню задачі (4 – 6). Покажемо справедливість твердження 3. Для цього припустимо, що на основі шляху μ_{sj}^{**r} можна побудувати оптимальне рішення. Останнє означає, що на наступних рангах шлях μ_{sj}^{**r} набере більше значення за вагою функціонала, ніж шлях μ_{sj}^{*r} , тобто $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) < d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. Але шлях μ_{sj}^{*r} може бути побудований у ту ж множину m_{sj}^r , що й шлях μ_{sj}^{**r} , який задовольняє властивості v , але має довжину $d_a\left(\mu_{sj}^{*r}\right) \leq d_a\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. При цьому за вагою функціонала до цього моменту шлях μ_{sj}^{*r} має довжину більшу, ніж шлях μ_{sj}^{**r} . Отже, кожний з них набере ту саму величину за вагою c_j , але на початку $d_c\left(\mu_{sj}^{*r}\right) > d_c\left(\mu_{sj}^{**r}\right)$. Виходить, що припущення про те, що на основі шляху μ_{sj}^{**r} можна побудувати оптимальне рішення – не вірно, а твердження 3 – справедливо.

Приклад 6. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30$$

у відповідності зі стратегією L_3 і L_8 (рис. 10).

Рішення. Розглянемо застосування стратегії L_8 до однієї з множин графа $D\Delta$ – множини $m_{s5}^{r=3}$. У результаті в ньому залишаються лише два шляхи – $\mu_{s125}^{r=3}$, $\mu_{s245}^{r=3}$ – що відповідають двом векторам: (11001000) і (01011000), а без цього правила їх було 5 (див. приклад 4). Аналогічний виграш і для інших множин.

γ_j						
197	<u>s1(47,10)*</u>					
	1					
152	<u>s2(45,4)</u>	<u>s12(92,14)*</u>				
	2	2				
114	<u>s3(38,10)</u>	<u>s13(85,20)</u> <u>s23(83,14)</u>	<u>s123(130,24)</u>			
	3	3	3			
82	<u>s4(32,8)</u>	<u>s14(79,18)</u> <u>s24(77,12)</u> <u>s34(70,18)</u>	<u>s124(124,22)*</u> <u>s134(117,28)</u> <u>s234(115,22)</u>			
	4	4	4	4		
60	<u>s5(22,9)</u>	<u>s15(69,19)</u> <u>s25(67,12)</u> <u>s35(60,19)</u> <u>s45(54,17)</u>	<u>s125(114,23)</u> <u>s135(107,29)</u> <u>s235(105,23)</u> <u>s145(101,27)</u> <u>s245(99,21)</u>			
	5	5	5	5	5	
38	<u>s6(22,5)</u>	<u>s16(69,15)</u> <u>s26(67,9)</u> <u>s36(60,15)</u> <u>s46(54,13)</u>	<u>s126(114,19)</u> <u>s136(107,25)</u> <u>s236(105,19)</u> <u>s146(101,23)</u> <u>s246(99,17)</u>	<u>s1236(152,29)</u> <u>s1246(146,27)*</u> <u>s1256(136,28)</u> <u>s2456(121,26)</u>		
	6	6	6	6	6	6
18			<u>s127(112,15)</u>	<u>s1237(150,25)</u> <u>s1247(144,23)</u> <u>s1257(134,24)</u> <u>s1267(134,20)</u>	<u>s12367(172,30)</u> <u>s12467(166,28)*</u>	
	7	7	7	7	7	77
0						<u>s124678(184,29)</u>
	8	8	8	8	8	88
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6

$$* r=6 \quad \mu_{s124678} \rightarrow \vec{x}^{onm} = (11010111).$$

$$f(\vec{x}^{onm}) = 184.$$

Рисунок 10. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_8

Далі розглянемо стратегію L_9 фільтрації рішень у коридорі на основі *каліброваних векторів*. Для цього введемо поняття каліброваного вектора $\bar{y}_j, j = (\overline{1, n})$ для кожної вершини j графа $D\Delta$.

Множина $\{\bar{y}_j\}$ утворить калібровану шкалу, яка дає верхню оцінку r_e , для будь-якого вектора $\vec{x}$, котрий відповідає шляху μ_{sj}^r , і що дозволяє визначити, на скільки рангів можна ще продовжити шлях μ_{sj}^r , що задовольняє властивості v .

Побудова каліброваних векторів $\vec{y}_j$ почнемо з першої вершини графа $D\Delta$, спочатку відсортувавши коефіцієнти $\{a_{1j}\}$ у порядку зростання. Утвориться вектор $\vec{a}'_{1q}$, $q = (\overline{1, n})$, в якого $a'_{11} \leq a'_{12} \leq \dots \leq a'_{1n}$. У цьому векторі $\vec{a}'_{1q}$ викреслюємо $a'_{1q} = a_{11}$, після чого формуємо компоненти каліброваного вектора $\vec{y}_1$ за правилом:

$$y_{1k} = a_{1k} + y_{1(k-1)}; \quad k = (\overline{1, n-1}); \quad y_{10} = 0. \quad (17)$$

Далі у $\vec{a}'_{1q}$ викреслюємо $a'_{1q} = a_{12}$, після чого аналогічно правилу (17) продовжуємо формувати компоненти вектора $\vec{y}_2$, $\vec{y}_3$ і т. д. На j -му кроці викреслюємо в $\vec{a}'_{1q}$ елемент $a'_{1q} = a_{1j}$, тоді:

$$y_{jk} = a_{jk} + y_{j(k-1)}; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad y_{j0} = 0; \quad y_{n0} = b_1; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (18)$$

Приклад 7. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 \quad (19)$$

при обмеженні

$$10x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 10. \quad (20)$$

Для задачі (19–20) є вектор $\vec{a}'_{1q} = \{2, 3, 4, 7, 10\}$. З нього видаляємо $a'_{15} = a_{11} = 10$, тоді $\vec{a}'_{1q} = \{2, 3, 4, 7\}$, а $\vec{y}_1 = \{0, 2, 5, 9, 16\}$. Далі викреслюємо $a'_{1q} = a_{12} = 3$. Вектор $\vec{a}'_{1q} = \{2, 4, 7\}$, а калібрований вектор $\vec{y}_2 = \{0, 2, 6, 13\}$. Аналогічним чином за допомогою (18) будуються калібровані вектори для вершин 3, 4, 5: $\vec{y}_3 = \{0, 2, 6\}$; $\vec{y}_4 = \{0, 2\}$; $\vec{y}_5 = \{0\}$. Сформулюємо правила, за яких за допомогою каліброваного вектора $\vec{y}_j$ для вершин $j = (\overline{1, n})$ можна визначити шляхи μ_{sj}^r в графі $D\Delta$ та верхню оцінку $\hat{r}_e$ максимального значення рангу, що

продовжує r шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$ (тобто яке число одиниць може додатися у вектор $\vec{x}$).

Правило K_1

а) обчислюємо для шляху μ_{sj}^r величину $\Delta d = b_1 - d_a(\mu_{sj}^r)$;

б) у каліброваному векторі $\vec{y}_j$ для вершини j знаходимо номер k , $k = (\overline{0, n-j})$ елемента y_{jk} , починаючи з якого $y_{jk} > \Delta d$ (якщо $\forall y_{jk} < \Delta d$, то $k = n-j+1$);

в) визначаємо значення r_B для шляху μ_{sj}^r в графі $D\Delta$: $r_B = k-1$.

У прикладі (19–20) шлях $\mu_{s2}^{r=1}$ має $d_a(\mu_{s2}^{r=1}) = 3$. Шляху $\mu_{s2}^{r=1}$ відповідає вектор $\vec{x} = (01000)$. Визначимо $r_B(\mu_{s2}^{r=1})$ за правилом K_1 .

а) $\Delta d = b_1 - d_a(\mu_{s2}^{r=1}) = 10 - 3 = 7$;

б) в $\vec{y}_2$ елемент $y_{23} > \Delta d$ ($13 > 7$), значить $k = 3$;

в) значення $\hat{r}_s(\mu_{s2}^{r=1}) = k - 1 = 3 - 1 = 2$.

Отже, шлях в $\mu_{s2}^{r=1}$ у графі $D\Delta$ можна продовжити, задовольняючи обмеженням, не більш, ніж на два ранги. Справедливість застосування правила K_1 для визначення r_B підтверджується теоремою 4.

Теорема 4. Якщо шлях μ_{sj}^r у вершину j рангу r у графі $D\Delta$ має довжину за вагою обмежень $d_a(\mu_{sj}^r) = d$, то верхня оцінка $\hat{r}_s$, побудована за правилом K_1 , визначає максимальне число рангів r , на яке може бути продовжений шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$.

Доказ. Припустимо, що для шляху μ_{sj}^r з вершини j найшлося таке його продовження $\mu_{sj}^{r'}$, ранг якого $r' > r_B + 1$. Але, відповідно до пункту а) правила K_1 $\Delta d'$ для $\mu_{sj}^{r'}$ буде більше Δd для шляху $\mu_{sj}^{r+\hat{r}_s}$, що не можливо, тому що b_1 фіксовано й обидва шляхи є продовженням шляху μ_{sj}^r з довжиною $d_a(\mu_{sj}^r) = d$.

Отже, $d' = \Delta d$ і припущення про існування $\mu_{sj}^{r'}$ не вірно. Теорема доведена.

До цього ми не враховували величину коефіцієнтів c_j при функціоналі, а прогноз здійснювали тільки на основі коефіцієнтів a_{ij} . Поставимо у відповідність кожному вектору $\bar{y}_j$ вектор $\bar{z}_j$, елементи якого є верхніми оцінками $\hat{z}_e$ довжини шляху μ_{sj}^r за вагою функціонала c_j . Компоненти вектора $\bar{z}_j$ для вершини j формуються відповідно до правила K_2 .

Правило K_2 .

Нехай перший компонент вектора $\bar{z}_j$ вершини j дорівнює $\hat{z}_{j1}^e = c_{j+1}$, другий – $\hat{z}_{j2}^e = c_{j+2} + \hat{z}_{j1}^e$; третій $\hat{z}_{j3}^e = c_{j+3} + \hat{z}_{j2}^e$; й т. д. k -й компонент –

$$\hat{z}_{jk}^B = c_{j+k} + \hat{z}_{j(k-1)}^B; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad \hat{z}_{j0}^B = 0; \quad \hat{z}_{n0}^B = 0; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (21)$$

Тоді, за співвідношенням (21) побудуємо $\bar{z}_j$ для задачі (19–20). У вершині $j=1$ елементи вектора $\bar{z}_1$ відповідно до правила K_2 будуть:

$$\hat{z}_{10}^e = 0;$$

$$\hat{z}_{11}^e = c_{j+1} = c_2 = 15;$$

$$\hat{z}_{12}^e = c_3 + \hat{z}_{11}^e = 12 + 15 = 27;$$

$$\hat{z}_{13}^e = c_4 + \hat{z}_{12}^e = 8 + 27 = 35;$$

$$\hat{z}_{14}^e = c_5 + \hat{z}_{13}^e = 2 + 35 = 37.$$

Для вершини $j = 2$ згідно співвідношенням (21) маємо:

$$\hat{z}_{20}^e = 0;$$

$$\bar{z}_1 = \{0, 17, 33, 46, 56, 65, 74, 83\}$$

$$\hat{z}_{22}^e = c_4 + \hat{z}_{21}^e = 8 + 12 = 20;$$

$$\hat{z}_{23}^e = c_5 + \hat{z}_{22}^e = 2 + 20 = 22.$$

Аналогічно будуються вектори для інших вершин графа ДА. Таким чином, для приклада (19–20) калібровані оцінні вектори для вершин $j = (\overline{1, n})$ мають вигляд:

$$j = 1; \quad \bar{y}_1 = \{0, 2, 5, 9, 16\}; \quad \bar{z}_1 = \{0, 15, 27, 35, 37\}; \quad \gamma_1 = 37;$$

$$j = 2; \quad \bar{y}_2 = \{0, 2, 6, 13\}; \quad \bar{z}_2 = \{0, 12, 20, 22\}; \quad \gamma_2 = 22;$$

$$\begin{array}{llll}
j = 3; & \bar{y}_3 = \{0,2,6\}; & \bar{z}_3 = \{0,8,10\}; & \gamma_3 = 10; \\
j = 4; & \bar{y}_4 = \{0,2\}; & \bar{z}_4 = \{0,2\}; & \gamma_4 = 2; \\
j = 5; & \bar{y}_5 = \{0\}; & \bar{z}_5 = \{0\}; & \gamma_5 = 0.
\end{array}$$

Неважко бачити, що у векторах $\bar{z}_j$ останні елементи збігаються з γ_j -вагою (13), що може набрати шлях μ_{sj}^r з вершини j на усіх наступних рангах при задоволенні їм властивості v . Як треба з (14), на основі рангового підходу можна більш точно визначати верхню оцінку $\hat{z}_e = f(\hat{r}_e)$ за рахунок того, що шлях μ_{sj}^r не завжди може бути продовжений на всі ранги, що не задовольняє властивості v . Інакше кажучи, на підставі рівності

$$\gamma_j = \hat{z}_{j_{r_e}}^e(\mu_{sj}^r) \quad (22)$$

можна збільшити ефективність фільтрації безперспективних шляхів, замінюючи в умові (14) γ_p на γ_j згідно з формулою (2.22), що дає стратегія L_9 на основі наступної нерівності:

$$d_c(\mu_{sp}^r) + \hat{z}_{p_{r_e}}^e(\mu_{sp}^r) < \max_{c_j} \left\{ d_c \left(\mu_{sp}^{*r} \right) \right\}. \quad (23)$$

Перевірка нерівності (23) дозволить відсікати шлях μ_{sp}^r з подальшого аналізу як не перспективний, тому що ми заздалегідь знаємо, що більш ніж на r_B рангів шлях μ_{sp}^r не може бути продовжений.

Приклад 8. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 47x_1 + 45x_2 + 38x_3 + 32x_4 + 22x_5 + 22x_6 + 20x_7 + 18x_8$$

при обмеженні

$$10x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 1x_8 \leq 30$$

у відповідності зі стратегіями L_3 , L_8 , L_9 (рис. 11).

$\bar{y}_1 = \{0,1,2,6,11,19,28\}$ $\bar{z}_1 = \{0,45,83,115,137,159,179\}$	<u>S1(47,10)5*</u> 1					
$\bar{y}_2 = \{0,1,2,7,15,24,34\}$ $\bar{z}_2 = \{0,38,70,92,114,134,152\}$	<u>S2(45,4)5</u> 2	<u>s12(92,14)4*</u> 2				
$\bar{y}_3 = \{0,1,2,7,15,24\}$ $\bar{z}_3 = \{0,32,54,76,96,114\}$	<u>s3(38,10)4</u> 3	<u>s13(85,20)3</u> <u>s23(83,14)4</u> 3	<u>s123(130,24)2</u> 3			
$\bar{y}_4 = \{0,1,2,7,16\}$ $\bar{z}_4 = \{0,22,44,64,82\}$	<u>s4(32,8)4</u> 4	<u>s14(79,18)3</u> <u>s24(77,12)4</u> <u>s34(70,18)3</u> 4	<u>s124(124,22)3*</u> <u>s134(117,28)2</u> <u>s234(115,22)3</u> 4			
$\bar{y}_5 = \{0,1,2,7\}$ $\bar{z}_5 = \{0,22,42,60\}$	<u>s5(22,9)3</u> 5	<u>s15(69,19)3</u> <u>s25(67,12)3</u> <u>s35(60,19)3</u> <u>s45(54,17)3</u> 5	<u>s125(114,23)3</u> <u>s235(105,23)3</u> <u>s145(101,27)2</u> <u>s245(99,21)3</u> 5			

* $r=6$
 $\mu_{s124678} \rightarrow \bar{x}^{opt} = (11010111)$
 $f(\bar{x}^{opt}) = 184.$

Рисунок 11. Ілюстрація роботи стратегії L_3 , L_8 та L_9

$\bar{y}_6 = \{0,1,2\}$ $\bar{z}_6 = \{0,20,38\}$	<u>s6(22,5)2</u> 6	<u>s16(69,15)2</u> <u>s26(67,9)2</u> <u>s36(60,15)2</u> <u>s46(54,13)2</u> 6	<u>s126(114,19)2</u> <u>s136(107,25)2</u> <u>s236(105,19)2</u> <u>s146(101,23)2</u> <u>s246(99,17)2</u> 6	<u>s1236(152,29)1</u> <u>s1246(146,27)2*</u> <u>s1256(136,28)2</u> <u>s2456(121,26)2</u> 6		
$\bar{y}_7 = \{0,1\}$ $\bar{z}_7 = \{0,18\}$			<u>s127(112,15)1</u> 7	<u>s1237(150,25)1</u> <u>s1247(144,23)1</u> 7	<u>s12367(172,30)0</u> <u>s12467(166,28)1*</u> 7	
$\bar{y}_8 = \{30\}$ $\bar{z}_8 = \{0\}$					<u>s124678(184,29)0*</u> 8	
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6

Рисунок 11. Закінчення

Рішення. На початку кожної вершини j графа $D\Delta$ зазначені калібровані вектори $\bar{y}_j$ й $\bar{z}_j, j = (\overline{1,n})$. За дужками кожного шляху μ_{sj}^r показана величина r_B .

Так, для шляху $\mu_{s14}^{r=2}$ оцінка дорівнює $\hat{r}_e = 3$.

Додаткове використання правила K_2 сприяло ефективному відсіванню безперспективних варіантів рішення.

Дотепер була розглянута множина $\{L_w\}$ стратегій відсікання для одновірної задачі ЦЛП із БЗ. Сформулюємо стратегії відсікання для m -мірних задач.

У випадку рішення m -мірних задач найбільш простою стратегією вибору є стратегія L_{10} , заснована на рекурентному співвідношенні (12). Принцип

формування шляхів у множинах ідентичний стратегії L_1 , за винятком необхідності виконувати m раз перевірку (2).

Приклад 9. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 16x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 5x_6 + 2x_7$$

при обмеженні

$$4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 1x_7 \leq 9,$$

$$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 3x_6 + 1x_7 \leq 9$$

у відповідності зі стратегіями L_3 і L_{10} (рис. 12).

γ_j							
52	s1(16,4,3)* 1						
37	s2(15,3,1) 2	s12(31,7,4)* 2					
25	s3(12,1,2) 3	s13(28,5,5) s23(27,4,3) 3	s123(43,3,6)* 3				
15	s4(10,2,1) 4	s14(26,6,4) s24(25,5,2) s34(22,3,3) 4	s124(41,9,5)* s234(38,7,6) 4				
7		s15(24,7,4) 5	s135(36,8,6) 5				
2							
0				s1237(45,9,7)* s1347(40,8,7) s1357(38,9,7) 7			
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	r = 7

* r=4
 $\mu_{s1237} \rightarrow \bar{x}_1^{\text{опт}} = (1110001);$
 * r=4
 $\mu_{s2345} \rightarrow \bar{x}_2^{\text{опт}} = (0111100);$
 $f(\bar{x}^{\text{опт}}) = 45.$

Рисунок 12. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_{10}

Рішення. Побудова множини m_{sj}^r здійснюється точно так, як і в одновірному завданні. У цьому прикладі два оптимальних рішення: шляхи $\mu_{s1237}^{r=4}$ й $\mu_{s2345}^{r=4}$.

Однак, другий губиться через наявність у множині $m_{s3}^{r=2}$ шляху $\mu_{s13}^{r=2}$, що домінує над $\mu_{s23}^{r=2}$.

Сполучення стратегії L_7 зі стратегією L_3 для випадку m -вірної задачі утворюють правило вибору L_{11} , яке полягає в тому, щоб з множини m_{sj}^r в множину $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = (\overline{r, n})$, наступного рангу вибрати шляхи, які задовольняють властивості v_i є максимальними за вагою функціонала c_j і мінімальні за кожною i -ою вагою обмежень a_{ij} , $i = (\overline{1, m})$.

Перше відповідає рекурентному співвідношенню (12), а друге описується наступним співвідношенням, заснованому на співвідношенні (15).

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \min_{a_{ij}} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}; \quad j = (\overline{r, n}); \quad p = (\overline{j+1, n}); \quad i = (\overline{1, m}). \quad (24)$$

Приклад 10. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\vec{x}) = 29x_1 + 28x_2 + 26x_3 + 25x_4 + 20x_5 + 17x_6 + 15x_7 + 10x_8$$

при обмеженні

$$1x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 2x_8 \leq 9,$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 1x_7 + 4x_8 \leq 9$$

у відповідності зі стратегіями L_3 і L_{11} (рис. 13).

Рішення. Побудова множини шляхів здійснюється відповідно до принципу оптимізації за напрямком (11). У множинах m_{sj}^r виділені підкресленням шляху μ_{sj}^r , що є мінімальними за кожним з обмежень (при рівності i -го обмеження вибирається шлях з найбільшою вагою за функціоналом) і максимальним за вагою функціонала.

Збільшення числа обмежень приводить до невизначеності в оцінці верхньої границі за вагою функціонала $\hat{z}_{j\hat{r}_e}^g$, яку може набрати шлях μ_{sj}^r і верхній

оцінці кількості рангів $\hat{r}_e$, на яку може бути продовжений цей шлях. Щоб уникнути такої невизначеності для кожної вершини $j = (\overline{1, n})$ будемо будувати не один, а m каліброваних векторів $\vec{y}_j^i$, $i = (\overline{1, m})$ за правилом:

$$y_{jk}^i = a_{jk}^i + y_{j(k-1)}^i; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad y_{j0}^i = 0; \quad y_{n0}^i = b_i; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (25)$$

У зв'язку із цим, правило K_1 визначення $\hat{r}_e$ для шляху μ_{sj}^r в багатомірній задачі змінюється на правило K_3 .

j							
37	S1(29,1,2)*	1					
13	S2(28,4,2)	2	s12(57,5,4)	2			
7	S3(26,2,1)	3	s13(55,3,3)* s23(54,6,3)	3	s123(83,7,5)		
2	S4(25,3,2)	4	s14(54,4,4) s24(53,7,4) s34(51,5,3)	4	s124(82,8,6) s134(80,6,5)*		
2	S5(20,4,4)	5	s15(49,5,6) s25(48,8,6) s35(46,6,5) s45(45,7,6)	5	s125(77,9,8) s135(75,8,8) s145(74,8,8) s345(71,9,7)		
5	S6(17,1,2)	6	s16(46,2,4) s26(45,5,4) s36(43,3,3) s46(42,4,4) s56(37,5,6)	6	s126(74,6,6) s136(72,4,5) s146(71,5,6) s346(68,6,5) s156(66,6,8) s356(63,7,7)	s1236(100,8,7)* s1246(99,9,8) s1346(98,7,7)	
0		7		7	s1237(98,9,6) s1347(95,8,6)	s13467(112,9,8)*	
		8		8			8

$$* r=5 \quad \mu_{s13467} \rightarrow \vec{x}^{onm} = (10110110);$$

$$f(\vec{x}^{onm}) = 112.$$

Рисунок 13. Ілюстрація роботи стратегії L_3 і L_{11}

Правило K_3 .

а) нехай $i = 1$;

б) при поточному значенні і обчислюємо для шляху μ_{sj}^r величину $\Delta d = b_i - d_a(\mu_{sj}^r)_i$;

в) у каліброваному векторі $\bar{y}_j^i$ вершини j знаходимо номер k-го $k = (\overline{0, n-j})$ елемента y_{jk}^i вектора $\bar{y}_j^i$, починаючи з якого $y_{jk}^i > \Delta d$ (якщо $\forall y_{jk}^i < \Delta d$, то $k = n - j + 1$);

г) для шляху μ_{sj}^r по i-му обмеженню в графі DΔ: $\hat{r}_e^i = k - 1$;

д) збільшуємо значення i на 1 і переходимо до пункту б) цього правила у випадку $i \leq m$ або до наступного пункту у випадку $i > m$;

е) серед усіх $\hat{r}_e^i$, $j = (\overline{1, m})$ вибираємо найменший.

Таким чином, відповідно до правила K₃ верхня оцінка r_B для шляху μ_{sj}^r в j-й вершині графа DΔ при m обмеженнях буде:

$$\hat{r}_e = \min_i \{ \hat{r}_e^i \}, \quad i = (\overline{1, m}). \quad (26)$$

Неважко показати, що при реалізації правила K₃ справедливості теореми 4 не порушується. Так, якщо по одному з обмежень ми зможемо пройти на r_1 рангів, а по іншому – на r_2 ранги й при цьому $r_1 > r_2$, то на ранг більший, ніж r_2 неможливо побудувати шлях, який задовольняє властивості v, оскільки r_2 – верхня оцінка по даному обмеженню.

Правило K₂ для визначення верхньої оцінки за вагою функціонала в m-мірних завданнях не змінюється.

Уведемо за аналогією з поняттям одномірного коридору поняття m-мірного коридору в множині s $g(n) \leq f(n) \leq c' \times g(n)$.

Позначимо підмножину векторів, що повинна залишитися в множині m_{sp}^r після фільтрації через m_{sp}^{rk} . Нагадаємо, що формування множини шляхів у m_{sp}^r здійснюється завжди таким чином, що довжина за вагою функціонала

першого з них більше довжини за вагою функціонала другого й т. д., тобто $d_c(\mu_k) \geq d_c(\mu_k) \geq \dots \geq d_c(\mu_k)$.

Визначення. Під виділенням m -мірного коридору будемо розуміти процес відсівання k -го шляху μ_k у множині m_{sp}^r , якому відповідає m -мірний вектор $(d_a(\mu_k)_1, d_a(\mu_k)_2, \dots, d_a(\mu_k)_m)$ за правилом K_4 .

Правило K_4 .

Якщо $(\forall i \in \overline{1, m}) d_a(\mu_v)_1 \leq d_a(\mu_k)_1$ при цьому $v = \overline{(1, k-1)}$, то вектор $(d_a(\mu_k)_1, d_a(\mu_k)_2, \dots, d_a(\mu_k)_m)$ і відповідний йому шлях μ_k можна видалити з подальшого аналізу, інакше $\mu_k \in m_{sp}^{r=r+1}$.

Справедливість відсівання за правилом K_4 слідує з наступного досить очевидного твердження 4.

Твердження 4. Шляхи $\mu_{sp}^r \in m_{sp}^r$, що не потрапили в m_{sp}^{rk} не можуть визначати оптимальне рішення задачі (1 – 3).

Доказ. Нехай деякий шлях $\mu_{sp}^r \notin m_{sp}^r$, є оптимальним рішенням задачі. Тоді відповідно до правила K_4 в m_{sp}^{rk} існує шлях μ_{sp}^{**r} більший за вагою функціонала й менший за всіма вагами обмежень. Отже, шлях μ_{sp}^{**r} набере на наступних рангах і більше значення за вагою функціонала, при задоволенні властивості v , тобто $d_c(\mu_k^{**r}) > d_c(\mu_k^{*r})$. Ми прийшли до протиріччя, а значить наше припущення не вірно, і твердження 4 справедливо.

Позначимо потужність множини $|m_{sj}^r|$ через Ξ . До початку відсівання $|m_{sj}^{rk}| = \emptyset$. Тоді процедуру формування m -мірного коридору можна зобразити у вигляді послідовної перевірки векторів $(1, \Xi)$ з множини m_{sj}^r на можливість відсівання за правилом K_4 . Вектори, які залишились, утворять підмножину m_{sj}^{rk} . Цю процедуру будемо називати стратегією L_{12} , що полягає у виділенні m -мірного коридору усередині кожної множини m_{sj}^r рангу r , коли в нього побудовані всі шляхи з вищестоящих вершин графа $D\Delta$.

Приклад 11. Потрібно максимізувати функціонал

$$f(\bar{x}) = 17x_1 + 15x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 7x_5 + 4x_6 + 4x_7$$

при обмеженні

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 9x_5 + 2x_6 + 1x_7 \leq 23,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 1x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 6x_7 \leq 33$$

у відповідності зі стратегіями L_9 і L_{12} (рис. 14).

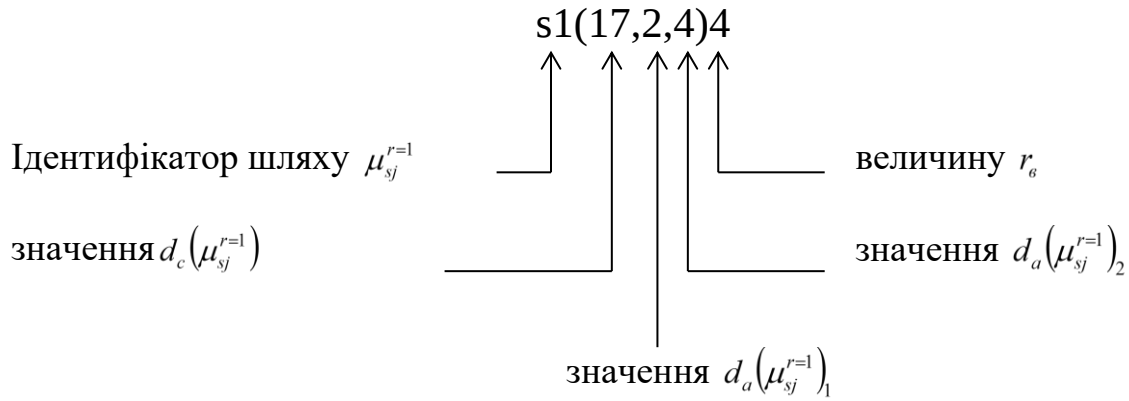
$\bar{y}_1^1 = \{0,1,3,7,13,22,31\}$ $\bar{y}_1^2 = \{0,17,13,21,30,40\}$ $\bar{z}_1 = \{0,15,28,36,43,47,51\}$	$s1(17,2,4)4^*$ 1					$\bar{x}_1^{opt} = (1111010)$ $\bar{x}_2^{opt} = (1111001)$ $f(\bar{x}^{opt}) = 57.$
$\bar{y}_2^1 = \{0,13,9,18,27\}$ $\bar{y}_2^2 = \{0,17,15,24,34\}$ $\bar{z}_2 = \{0,13,21,28,32,36\}$	$s2(15,4,6)4$ 2	$s12(32,6,10)3^*$ 2				
$\bar{y}_3^1 = \{0,13,12,21\}$ $\bar{y}_3^2 = \{0,17,15,25\}$ $\bar{z}_3 = \{0,8,15,19,23\}$	$s3(13,6,9)3$ 3	$s13(30,8,13)3$ $s23(28,10,15)3$ 3	$s123(45,12,19)2^*$ 3			
$\bar{y}_4^1 = \{0,13,12\}$ $\bar{y}_4^2 = \{0,6,14,24\}$ $\bar{z}_4 = \{0,7,11,15\}$	$s4(8,9,1)3$ 4	$s14(25,11,5)3$ $s24(22,13,7)2$ $s34(21,15,10)2$ 4	$s124(40,15,11)2$ $s134(38,17,14)2$ 4	$s1234(53,21,20)1^*$ 4		

Рисунок 14. Ілюстрація роботи стратегії L_9 і L_{12}

$\bar{y}_5^1 = \{0,1,3\}$ $\bar{y}_5^2 = \{0,6,16\}$ $\bar{z}_5 = \{0,4,8\}$	$s15(24,11,12)2$ 5	$s1235(52,21,27)1$ 5				
$\bar{y}_6^1 = \{0,1\}$ $\bar{y}_6^2 = \{0,6\}$ $\bar{z}_6 = \{0,4\}$	$s1236(49,14,29)0$ 6	$s12346(57,23,30)0^*$ 6				
	$s12367(57,22,23)0^*$ 7					
	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6

Рисунок 14. Закінчення

Рішення. Побудову шляхів здійснюємо на основі принципу оптимізації за напрямком й за узагальненою процедурою A_0 . Кожний шлях μ_{sj}^r записується вираженням, що містить:



Пояснимо порядок роботи правил K_1 і K_3 на прикладі шляху $\mu_{s1}^{r=1}$. Визначимо r_6 . Для цього:

1. Припускаємо $i = 1$.
2. При поточному значенні i обчислюємо Δd для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$:

$$\Delta d = b_i - d_a(\mu_{s1}^{r=1})_1 = 23 - 2 = 21.$$

3. У каліброваному векторі $\bar{y}_1^1$ вершини 1 знаходимо номер k -го елемента y_{1k}^1 вектора $\bar{y}_j^i$, починаючи з якого $y_{1k}^1 > \Delta d \rightarrow k = 5$.

4. Для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$ щодо 1-го обмеження: $r_6^i = k - 1 = 5 - 1 = 4$.
5. Збільшуємо i на 1, тобто $i = 2$.
6. При поточному значенні i обчислюємо величину для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$:

$$\Delta d = b_i - d_a(\mu_{s1}^{r=1})_2 = 33 - 4 = 29.$$

7. У каліброваному векторі $\bar{y}_1^2$ вершини 1 знаходимо номер k -го елемента y_{1k}^2 вектора $\bar{y}_j^i$, починаючи з якого $y_{1k}^2 > \Delta d \rightarrow k = 5$.

8. Для шляху $\mu_{s1}^{r=1}$ щодо 2-го обмеження: $\hat{r}_6^i = k - 1 = 5 - 1 = 4$.
9. Серед усіх $\hat{r}_6^i$, $j = (\overline{1,2})$ вибираємо найменший, тобто $\hat{r}_6 = 4$.

Маючи значення $\hat{r}_6$ відносно співвідношення (23), перевіряємо на можливість відсікання за стратегією L_9 .

Після формування множин усього рангу здійснюється виділення m -мірного коридору. Наприклад, на ранзі $r = 2$ у множині $m_{s3}^{r=2}$ шлях $\mu_{s23}^{r=2}$ не попадає в коридор, тому що шлях $\mu_{s13}^{r=2} \in m_{s3}^{r=2}$ має більшу довжину за вагою функціонала й меншу довжину за вагами усіх обмежень.

Однак, більш ефективною є стратегія відсікання L_{13} , при якій виділення m -мірного коридору здійснюється на всьому ярусі r , після того, як на ньому сформулюються всі шляхи, які задовольняють у кожній вершині властивості v . Тоді здійснюється перевірка: чи є для довільного шляху $\mu_{sp}^r \in m_{sp}^r$ рангу r шлях μ_{sj}^r , що належить одному з вищестоящих множин графа $D\Delta$ над m_{sp}^r , який має більшу довжину за вагою функціонала й не меншу довжину за вагою усіх m обмежень. Якщо такий шлях μ_{sj}^r є, то відповідно до твердження 4, шлях μ_{sp}^r можна видалити з розгляду як безперспективний.

Таким чином, процедуру A_0 зі стратегіями $\{L_w\}$ і правилами K_w можна покласти в основу побудови наближених і точних алгоритмів рішення задачі про рюкзак, тобто одержати різні модифікації процедури A_0 залежно від комбінацій використовуваних правил відсікання $\{L_w\}$ безперспективних шляхів у множинах μ_{sj}^r на основі застосування принципу оптимізації за напрямком.