

5.6 Про розрахунок на міцність і жорсткість оболонкових конструкцій на базі варіаційного RVR-метода

Проблема підвищення надійності механізмів і машин є дуже актуальною у машинобудівній галузі. Рішення цієї проблеми пов'язане, зокрема, з потребами уточнених досліджень напружено-деформованого стану (НДС) відповідальних оболонкових елементів конструкцій сучасної техніки. Зазначимо, що в інженерній практиці при розв'язанні складних задач розрахунку тривимірного НДС пружних оболонок усе більша увага приділяється змішаним варіаційним постановкам, що будуються на основі функціонала Рейсснера I_R [332 – 334] при незалежній апроксимації вектора переміщення u і тензора напружень σ . Чисельної реалізації таких постановок істотно заважали утруднення в оцінці точності одержуваних результатів через відсутність екстремуму в точці стаціонарності функціонала I_R . Тому у розв'язанні названої проблеми становить науковий інтерес запропонована в роботі [335] оцінка вірогідності наближених розв'язків просторових задач статички пружних оболонок довільної товщини.

Ефективність чисельних методів визначається, насамперед, можливістю одержання науково обґрунтованих і достовірних результатів. Тому у зв'язку зі зростаючою роллю наближених методів для розв'язання різних задач природознавства визначальне значення для оцінки результатів здобувають питання про збіжність одержуваних розв'язків і аналіз їхньої погрішності. Незважаючи на те, що варіаційні методи в розрахунковій інженерній практиці одержали велике поширення, при достатку розв'язаних задач, на жаль, не завжди є впевненість затверджувати, що знайдений розв'язок є достовірним – особливо це зауваження стосується задач з областями складної геометрії. Варто мати на увазі, що якщо навіть удається засобами функціонального аналізу довести в загальному виді збіжність створеного наближеного методу, це не виключає необхідності вивчення його практичної збіжності.

Точність наближеного розв'язку можна оцінити різними способами: порівнянням чисельних результатів з експериментальними даними чи з відомим точним розв'язком; розрахунками простих тестових прикладів; шляхом статистичного підходу; дослідженням швидкості збіжності; визначенням числа членів, необхідного для задоволення наперед заданій точності; оцінкою залишкового члена ряду; визначенням числового чи відсоткового вкладу кожного зі знайдених членів ряду в їхню суму абсолютних величин; проведенням повторних обчислень з різними значеннями параметрів задачі, таких як величина кроку, число ітерацій. У цьому плані представляє науково-практичний інтерес розроблений новий науково обґрунтований [336] варіаційний чисельно-аналітичний RVR-метод [337], в якому програмно здійснюваний алгоритм [335] апостеріорної двосторонньої інтегральної оцінки точності наближених розв'язків варіаційних задач є надійним засобом перевірки вірогідності одержуваних чисельних результатів, оскільки його ефективність підтверджена чисельними дослідженнями збіжності розв'язків крайових задач різної складності та задовільною відповідністю отриманих результатів з відомими в літературі чисельними й експериментальними даними.

RVR-метод запропоновано для розрахунку тривимірного НДС статично навантажених нетонких анізотропних оболонок (зокрема, пластин), як однозв'язних, так і ослаблених отворами довільних розмірів і форм [337 – 341]. Алгоритмічно простий при чисельній реалізації RVR-метод ґрунтується на варіаційному принципі Рейсснера [332 – 334] (для підвищення точності розв'язання задач), методі І.М. Векуа [342] (для зведення розв'язку тривимірної задачі регулярною послідовністю розв'язків двовимірних задач), теорії R-функцій [343 – 347] (для точного врахування на аналітичному рівні геометричної інформації досліджуваних оболонок з отворами) та на залученні повної системи загальних рівнянь просторових задач теорії пружних оболонок [348].

Проведені чисельні дослідження підтверджують перспективну можливість ефективного використання RVR-методу при проектуванні оболонкових

елементів конструкцій у різних галузях сучасної техніки. Зокрема, при розробці RVR-методу були поставлені і вирішені наукові задачі:

- теоретично обґрунтовано використання змішаного варіаційного принципу Рейсснера для розв'язання в тривимірній постановці складних крайових задач механіки деформівного твердого тіла;

- надано нові варіаційні постановки просторових крайових задач статично навантажених пружних оболонок довільної гауссової кривини;

- розвинуто метод редукції тривимірних задач теорії оболонок за рахунок запропонованого алгоритму регулярного процесу уточнення моделей оболонки шляхом варіювання кількістю утримуваних членів у компонентах структур розв'язків для переміщень і напружень; створено комп'ютерні програмні розробки, що реалізують чисельно-аналітичний метод розв'язання крайових задач і процеси регулярного уточнення моделі пружної оболонки;

- уперше сформульовано і математично доведено (на базі варіаційних нерівностей теорії операторів у гільбертовому просторі та методу подвійності теорії опуклого аналізу) достатню ознаку збіжності методу Рітца при відшукуванні точки стаціонарності неекстремального функціонала Рейсснера (конструктивним слідством доведеної апостеріорної оцінки точності розв'язків змішаних варіаційних задач є те, що для покращення збіжності процесу Рітца шукані функції доцільно подати структурами розв'язків, які точно задовольняють усі граничні умови досліджуваних крайових задач);

- створено нові аналітичні структури розв'язків задач статичної пружності оболонок, які враховують зміну метрики за товщиною оболонок і точно задовольняють усі граничні умови для просторових крайових задач;

- отримано програмно здійснюваний в RVR-методі алгоритм апостеріорної двосторонньої інтегральної оцінки точності наближених розв'язків варіаційних задач (його ефективність підтверджена чисельними дослідженнями збіжності розв'язків крайових задач різної складності та задовільною відповідністю одержуваних результатів з відомими в літературі аналітичними, чисельними й

експериментальними даними).

Як відомо, пружні оболонки, що ослаблені отворами (концентраторами напружень) найрізноманітніших форм і розмірів, є одними з найбільш відповідальних елементів, від міцності яких нерідко залежить працездатність і надійність досліджуваної конструкції в цілому. Успіх у розрахунках НДС оболонок визначається не тільки обґрунтованістю розрахункових схем і можливостями прийнятої уточненої моделі оболонки, але і рівнем реалізації використовуваного методу при розв'язанні конкретних і значимих у прикладному відношенні класів задач.

В представленій роботі за допомогою викладеного в монографії [337] ефективного RVR-методу розглянемо дослідження кількісних і якісних закономірностей концентрації напружень в циліндричній оболонці с періодичною системою прямокутних отворів на прикладі розрахунку стрічкового бандажу - згорнутої по дузі окружності сталевий смуги, якою зв'язують у пакети робочі лопатки парових турбін. Такий бандаж необхідний для демпфірування коливань і зменшення дій обурюючих сил на окрему лопатку. Крім того він сприяє кращій організації парового потоку і зменшує протічки пару в робочому колесі, підвищуючи тим самим економічність турбіни. У бандажу є отвори для шипів робочих лопаток, що входять у ці отвори. Шипи розклепуються, за рахунок чого бандаж утримується на лопатках. Основним навантаженням, що сприймається бандажем під час роботи турбіни, є навантаження від відцентрових сил.

Існують різні методи розрахунку на міцність стрічкових бандажів. Так, у роботах [349, 350] даються спрощені методи розрахунку, які, незважаючи на свою простоту, мають істотні недоліки і не дозволяють одержувати результати з достатнім ступенем точності. Чисельне дослідження бандажа з круговими отворами проведено в статті [351]. У даній роботі розв'язується більш складна крайова задача, коли бандаж розглядається як пружна оболонка з періодичною системою отворів прямокутної форми.

Досліджуваний бандаж за своєю конструкцією є елементом циліндричної оболонки радіуса R її серединної поверхні Ω_s і сталої товщини h та у розгорненні являє собою смугу, визначення НДС якої внаслідок симетрії зводиться до дослідження періодичної області Ω - розрахункової ділянки ABCDEF (рис. 1), де $AB = a$, $BC = b$, $FE = c$, $ED = d$. Координатна вісь x ($-b \leq x \leq b$) спрямована по утворюючої, вісь y - по напрямної циліндра, а координатна лінія z ($-h/2 \leq z \leq h/2$) перпендикулярна поверхні Ω_s ($z = 0$).

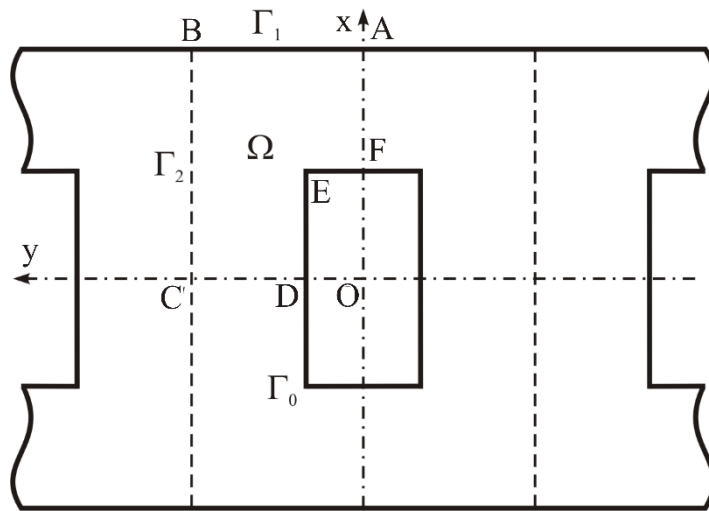


Рисунок 1. Розрахункова періодична ділянка пружної області бандажа

Основним навантаженням, що сприймається бандажем, є рівномірно розподілене навантаження від відцентрових сил інтенсивності

$$q = \rho \omega^2 R h, \quad (1)$$

де ρ і ω - щільність матеріалу і кутова швидкість обертання пружної оболонки.

Розіб'ємо границю області Ω на елементи Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 ($\omega_s = 0$ - рівняння елемента Γ_s ; $s = \overline{0,2}$), де Γ_0 - контур отвору, Γ_1 - контур AB і Γ_2 - контур BC . Уважається, що краї отворів жорстко защемлені, а торці оболонки ($x = \pm b$) вільні від зовнішніх зусиль і моментів. Використовуючи метод Рітца для розв'язання варіаційного рівняння Рейсснера [337], введемо шукані функції - незалежні між собою узагальнені переміщення u , v , w , γ_1 , γ_2 та узагальнені зусилля N_x , N_y , S , M_x , M_y , H , Q_x і Q_y теорії оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю [352].

Граничні умови розглянутої крайової задачі на жорстко защемленому контурі Γ_0 , на вільній від зовнішніх зусиль та моментів границі Γ_1 та на контурі Γ_2 (згідно умов періодичності розв'язків) мають вигляд:

$$\text{на } \Gamma_0 \quad u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \quad (2)$$

$$\text{на } \Gamma_1 \quad N_x = S = M_x = H = Q_x = 0; \quad (3)$$

$$\text{на } \Gamma_2 \quad v = S = \gamma_2 = H = Q_y = 0. \quad (4)$$

Для сформульованої крайової задачі структура аналітичних розв'язків (узагальнених переміщень і зусиль), які точно задовольняють всім заданим граничним умовам (2), (3) і (4), шукаємо у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{1m} P_{2i+1} C_j; & v &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{2m} P_{2i} S_j; \\ w &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{3m} P_{2i} C_j; & N_x &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{1m} P_{2i} C_j; \\ N_y &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{2m} P_{2i} C_j; & S &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{3m} P_{2i+1} S_j; \\ Q_x &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{7m} P_{2i+1} C_j; & Q_y &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{8m} P_{2i} S_j, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де $A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{5m}, B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{8m}$ - шукані сталі; $m = i(n_2 + 1) + j + 1$; P_n - поліном Лежандра ступеня n щодо змінної x ; функції C_j і S_j , ω_0 і ω_1 визначаються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} C_j &= \cos \frac{j\pi}{a} y; & S_j &= \sin \frac{(j+1)\pi}{a} y; \\ \omega_0 &= \omega_2 \vee_0 \quad \omega_3 = \omega_2 + \omega_3 + \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}; \\ \omega_1 &= \frac{1}{2b} (b^2 - x^2); & \omega_2 &= \frac{1}{2d} (x^2 - d^2); & \omega_3 &= \frac{1}{2c} (y^2 - c^2). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Зазначимо, що вирази для шуканих розв'язків $\gamma_1, \gamma_2, M_x, M_y, H$ будуть такими ж, як і вирази для u, v, N_x, N_y, S в (5), якщо в останніх замінити A_{1m} $A_{2m}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}$ на $A_{4m}, A_{5m}, B_{4m}, B_{5m}, B_{6m}$ відповідно.

Згідно [337] для досліджуваної ізотропної циліндричної оболонки з обраною системою координат (x, y, z) варіаційне рівняння Рейсснера у випадку точного задовільнення розв'язків крайовим умовам (в цьому разі відсутні контурні інтеграли, що містять у собі ці умови) має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ - \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right] \delta u - \left[\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{Q_y}{R} \right] \delta v - \right. \\ & - \left[-\frac{N_y}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right] \delta w + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{Gh} S \right] \delta S - \\ & - \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x \right] \delta \gamma_1 - \left[\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y \right] \delta \gamma_2 + \\ & + \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) \right] \delta N_x + \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{R} w - \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) \right] \delta N_y + \\ & + \left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{12}{ERh^3} (M_x - \nu M_y) \right] \delta M_x + \left[\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{12}{ERh^3} (M_y - \nu M_x) \right] \delta M_y + \\ & + \left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{1}{GRh} S \right] \delta H + \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1 - \frac{6}{5Gh} Q_x \right] \delta Q_x + \\ & \left. + \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{R} v + \gamma_2 - \frac{6}{5Gh} Q_y \right] \delta Q_y \right\} dx dy = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де E і ν – відповідно модуль Юнга (модуль пружності) і коефіцієнт Пуассона ізотропної оболонки; модуль зсуву $G = E/2(1 + \nu)$.

Після підстановки побудованої структури розв'язків (5) у варіаційне рівняння Рейсснера (7) і обчислення відповідних інтегралів досліджувана крайова задача зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих сталих на базі програмної розробки, написаної на

алгоритмічній мові Borland Pascal. Порядок симетричної стрічкової матриці системи рівнянь дорівнюватиме $N = 13(n_1 + 1)(n_2 + 1)$.

Виконаємо розрахунок сталевого стрічкового бандажа з параметрами: $E = 196 \text{ ГПа}$; $\nu = 0,3$; $R = 0,6 \text{ м}$; $h = 3 \text{ мм}$. При $d = 8 \text{ мм}$ були розглянуті такі варіанти розмірів періодичної області Ω бандажа:

$$1. \quad a : b : c : d = 3 : 5 : 1 : 2; \quad (8)$$

$$2. \quad a : b : c : d = 6 : 8 : 2 : 3; \quad (9)$$

$$3. \quad a : b : c : d = 3 : 4 : 1 : 2; \quad (10)$$

$$4. \quad a : b : c : d = 6 : 6 : 2 : 3. \quad (11)$$

У результаті чисельного розв'язання задачі на рис. 2 побудована пружна поверхня розрахункової ділянки Ω бандажа.

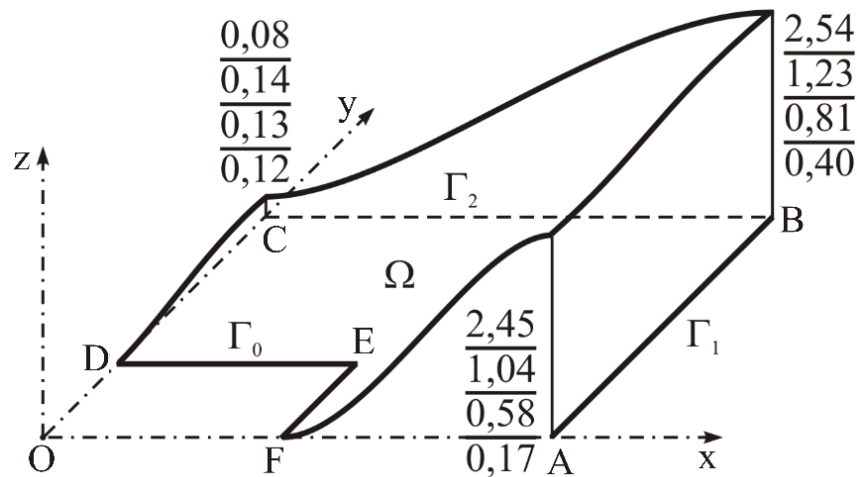


Рисунок 2. Пружна поверхня розрахункової ділянки Ω бандажа

По осі z на рис. 2 відкладені значення приведенного прогину

$$w^* = \frac{Eh^3}{qa^4} w, \quad (12)$$

а навколо точок A , B і C приводяться числа, що відповідають значенням w^* у цих точках для варіантів (8) ÷ (11). При збільшенні товщини h від 3 до 6 мм максимальна величина прогину $w_{\max}^*$ для кожного з варіантів збільшується на 20-25% (напруження при цьому змінюються не більше, ніж на 10%). При

збільшенні радіуса R від 0,5 до 1 м значення прогинів і напружень змінюються не більше, ніж на 4%, що дозволяє виконувати розрахунок бандажа, розглядаючи його як пластину. На рис. 3 і 4 для варіанта 3 (10) побудовані лінії рівня приведених головних напружень (при $i = 1, 2$)

$$\sigma_i^* = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_i \quad (13)$$

(цифри на кривих позначають величину $100\sigma_i^*/16$) на внутрішній (найбільш напруженій) поверхні розрахункової ділянки бандажа.

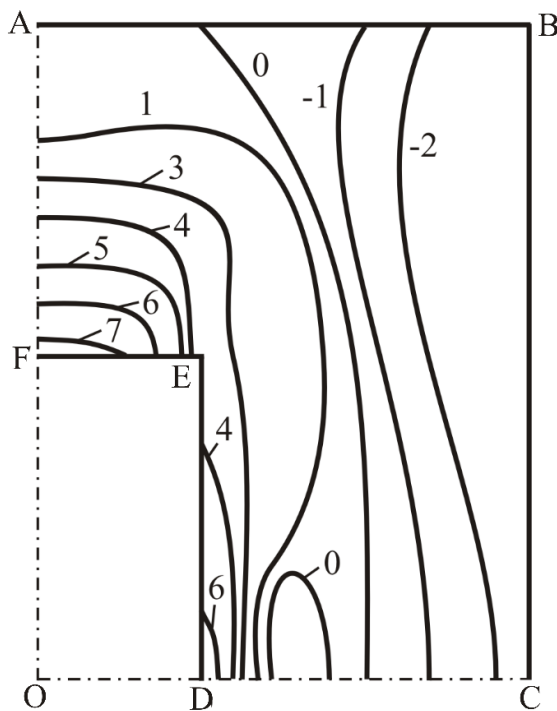


Рисунок 3. Лінії рівня величини σ_1^*

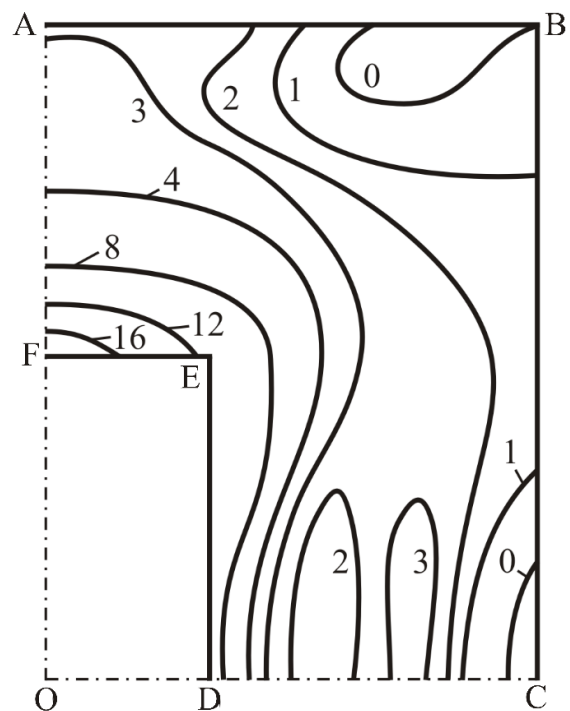


Рисунок 4. Лінії рівня величини σ_2^*

Таблиця 1. Значення величин σ_1^* і σ_2^* у точках досліджуваної області Ω

Номер варіанта	A	B	C	D	E	F
1 (8)	$\frac{-0,05}{0,0}$	$\frac{-0,16}{0,0}$	$\frac{-0,23}{0,11}$	$\frac{1,41}{1,94}$	$\frac{1,24}{3,31}$	$\frac{2,33}{5,62}$
2 (9)	$\frac{-0,1}{0,0}$	$\frac{-0,25}{0,0}$	$\frac{-0,38}{0,14}$	$\frac{1,51}{1,58}$	$\frac{1,03}{2,44}$	$\frac{2,31}{4,33}$

3 (10)	$\frac{0,00}{0,46}$	$\frac{-0,44}{0,0}$	$\frac{-0,36}{-0,09}$	$\frac{1,09}{1,34}$	$\frac{0,58}{1,89}$	$\frac{1,20}{2,98}$
4 (11)	$\frac{0,00}{0,22}$	$\frac{-0,45}{0,0}$	$\frac{-0,44}{-0,04}$	$\frac{0,90}{1,29}$	$\frac{0,43}{1,40}$	$\frac{0,89}{1,64}$

У табл. 1 для чотирьох варіантів (8) ÷ (11) надані значення величин σ_1^* (чисельник) і σ_2^* (знаменник) у деяких точках періодичної області Ω бандажа, а графіки напружень σ_1^* і σ_2^* на контурі FED прямокутного отвору представлені на рис. 5 і 6 відповідно.

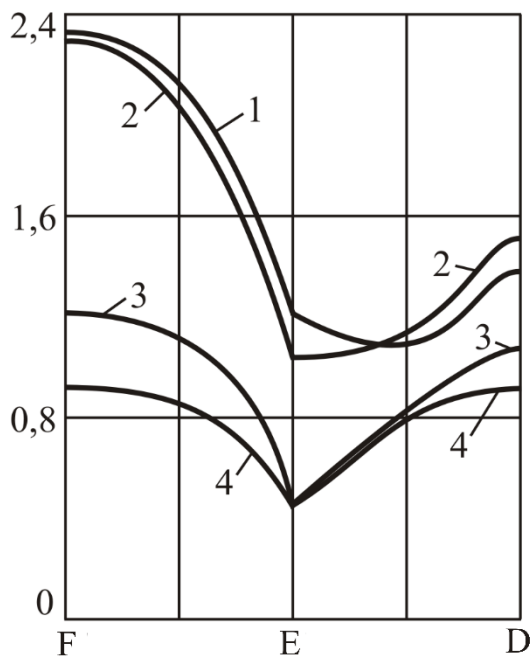


Рисунок 5. Графіки величини σ_1^*

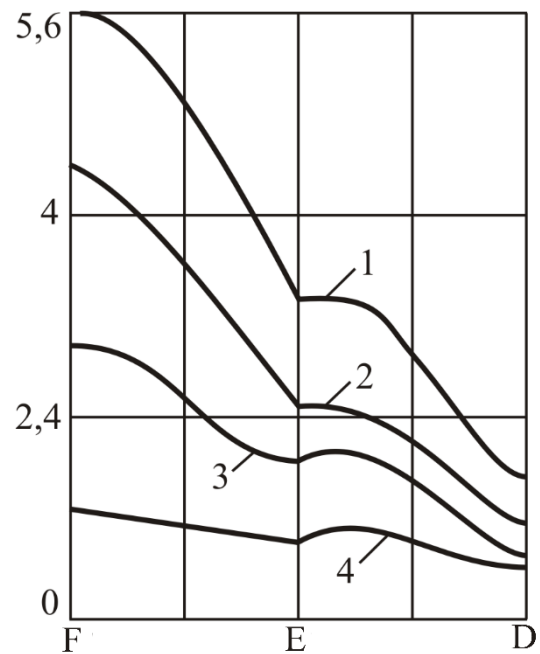


Рисунок 6. Графіки величини σ_2^*

Згідно представленим результатам проведено дослідження свідчить про те, що околиця точки F є найбільш напруженою областю розрахункової періодичної ділянки бандажа для всіх розглянутих варіантів його розмірів.

Розроблений RVR-метод дозволив одержати уточнені розв'язки ряду прикладних задач, зокрема, виконано чисельне дослідження напруженого стану пружного корпусу гідромотора, послабленого отворами. У приводах сучасних машин в якості засобу керування і поліпшення динамічних характеристик нерідко застосовуються гідрооб'ємні передачі. Одним з основних елементів

гідромотора є його корпус – товстостінне циліндричне тіло з періодичною системою співвісних розташованих циліндричних порожнин. При роботі машини масло, яке перебуває під тиском у порожнині отворів, викликає на їхній поверхні рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q . У гідрооб'ємних машинах тиск масла досягає високих значень, і фактор концентрації напружень близько отворів може суттєво впливати на несучу здатність конструкції, тому при проектуванні гідромотора виникає потреба дослідження його корпусу на міцність та виробленню обґрунтованого вибору його конструктивних параметрів.

Покажемо ефективність використання RVR-метода [337] у задачі розрахунку корпусу гідромотору. Оскільки порожнини його отворів навантажені силами, що не змінюються уздовж осі циліндричного корпусу і є перпендикулярними до цієї осі, частина корпусу, яка вилучена від торців, зазнає плоскої деформації. Тоді з метою спрощення математичної постановки відповідної крайової задачі теорії пружності досліджуваний корпус будемо розглядати як круглу ізотропну пластину сталої товщини із зовнішнім і внутрішнім круговими контурами радіусів R і R_1 (рис. 7). Уведемо циліндричну систему координат $\{r, \varphi, z\}$. Переміщення точок деформованого тіла відбувається в площинах (r, φ) – у перетинах, перпендикулярних до осі z циліндричного тіла, тобто

$$\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{rz} = 0; \quad \gamma_{\varphi z} = 0; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad \sigma_{\varphi z} = 0. \quad (14)$$

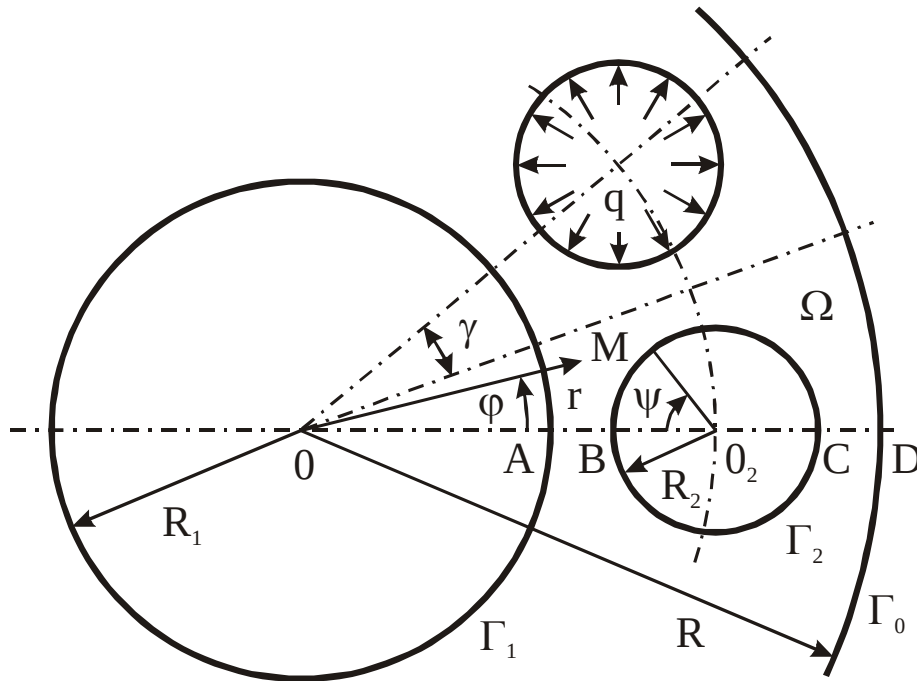


Рис. 7. Досліджувана періодична область Ω

Розглянемо в полярній системі координат $\{r, \varphi\}$ пружну область, яка ослаблена періодичною системою N кругових отворів однакового радіуса R_2 (рис. 7). Визначення НДС досліджуваного корпусу гідромотору згідно симетрії зводиться до розрахунку періодичної ділянки Ω , яка відповідає проміжку $0 \leq \varphi \leq \gamma$, де $\gamma = \pi/N$.

Нехай $OO_2 = a$. Розіб'ємо границю Ω на елементи Γ_i ($i = \overline{0, 2}$), які задаємо функціями ω_i , що звертаються в нуль на цих границях ($\omega_i|_{\Gamma_i} = 0$):

$$\omega_0 = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2; \quad \omega_1 = \frac{1}{R^2}(r^2 - R_1^2); \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2^2}(r^2 - 2ra \cos \varphi + a^2) - 1. \quad (15)$$

Зовнішня і внутрішня поверхня товстостінного циліндра (корпусу гідромотора) вільні від зовнішніх напружень, а поверхні циліндричних порожнин (кругових отворів радіуса R_2) навантажені рівномірно розподіленим тиском інтенсивності q . Таким чином, граничні умови досліджуваної плоскої задачі будуть наступними:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \text{ і } \Gamma_1; \\ \sigma_n = -q, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Крім того, на граничній поверхні, обумовленої рівнянням $\varphi = \gamma$, повинні виконуватися умови періодичності:

$$u_\varphi = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (17)$$

Згідно [337] нормальні σ_n і дотичні σ_τ напруження границі Γ_2 пов'язані з радіальними σ_r , окружними σ_φ і дотичними $\sigma_{r\varphi}$ напруженнями залежностями:

$$\sigma_n = f_1^2 \sigma_r + 2f_1 f_2 \sigma_{r\varphi} + f_2^2 \sigma_\varphi; \quad \sigma_\tau = f_1 f_2 (\sigma_\varphi - \sigma_r) + (f_1^2 - f_2^2) \sigma_{r\varphi}, \quad (18)$$

де напрямні косинуси f_1 і f_2 нормалі n до контуру Γ_2 визначаються виразами:

$$f_1 = \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}; \quad f_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Можливий також спрощений варіант, коли

$$f_1 = \frac{R_2}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial r}; \quad f_2 = \frac{R_2}{2r} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi}. \quad (20)$$

Варіанти (19) і (20), які точно збігаються на границі Γ_2 , є рівноцінними з погляду виконання граничних умов (16), однак збіжність процесу розв'язання досліджуваної задачі трохи краще при виборі функцій f_1 і f_2 у вигляді (19).

Представимо точно задовольняючі умовам (16) і (17) радіальне u_r , окружне u_φ переміщення та компоненти напружень σ_r , σ_φ , у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} u_{rm} P_k C_j; \\ u_\varphi &= \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} u_{\varphi m} P_k S_j; \\ \sigma_r &= \Phi_r \left(-f_1^2 q + f_2^2 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_m P_k C_j \right) + \omega_0 \omega_1 \omega_2 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_{rm} P_k C_j; \\ \sigma_\varphi &= \Phi_\varphi \left(-f_2^2 q + f_1^2 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_m P_k C_j \right) + \omega_2 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_{\varphi m} P_k C_j; \\ \sigma_{r\varphi} &= \Phi_{r\varphi} \left(-f_1 f_2 q - f_1 f_2 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_m P_k C_j \right) + \omega_0 \omega_1 \omega_2 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_{r\varphi m} P_k S_j, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

де $P_k = P_k \left(\frac{r - R_1}{R - R_1} \right)$ – поліноми Лежандра;

$$\left. \begin{aligned} C_j &= \cos \left(\frac{j\pi\varphi}{\gamma} \right); \quad S_j = \sin \left[\frac{(j+1)\pi\varphi}{\gamma} \right]; \quad m = i(n_2 + 1) + j + 1; \\ \Phi_r &= \frac{\omega_0 \omega_1}{\omega_0 \omega_1 + \omega_2}; \quad \Phi_\varphi = \frac{1}{1 + \omega_2}; \quad \Phi_{r\varphi} = \frac{\omega_0 \omega_1 S_0}{\omega_0 \omega_1 S_0 + \omega_2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для досліджуваної крайової задачі компоненти напружень можна представити також рядами:

$$\left. \begin{aligned}
 u_r &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} u_{rm} Q_i C_j; \\
 u_\varphi &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} u_{\varphi m} Q_i S_j; \\
 \sigma_r &= -T_r f_1^2 q + f_2^2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_m N_i C_j + \omega_2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_{rm} N_i C_j; \\
 \sigma_\varphi &= -T_\varphi f_2^2 q + f_1^2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_m N_i C_j + \omega_2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_{\varphi m} Q_i C_j; \\
 \sigma_{r\varphi} &= -T_{r\varphi} f_1 f_2 q - T_{\sigma 1} f_2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_m N_i C_j + \omega_2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sigma_{r\varphi m} N_i S_j; \\
 Q_i &= \cos \left[\frac{i \pi (r - R_1)}{R - R_1} \right]; \quad N_i = \sin \left[\frac{(i+1) \pi (r - R_1)}{R - R_1} \right]; \\
 T_r &= \frac{N_0}{N_0 + \omega_2}; \quad T_\varphi = \frac{1}{1 + \omega_2}; \quad T_{r\varphi} = \frac{N_0 S_0}{N_0 S_0 + \omega_2}; \quad T_\sigma = \frac{S_0}{S_0 + \omega_2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_i &= \cos \left[\frac{i \pi (r - R_1)}{R - R_1} \right]; \quad N_i = \sin \left[\frac{(i+1) \pi (r - R_1)}{R - R_1} \right]; \\
 T_r &= \frac{N_0}{N_0 + \omega_2}; \quad T_\varphi = \frac{1}{1 + \omega_2}; \quad T_{r\varphi} = \frac{N_0 S_0}{N_0 S_0 + \omega_2}; \quad T_\sigma = \frac{S_0}{S_0 + \omega_2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Варіаційне рівняння Рейсснера (умова стаціонарності функціонала Рейсснера I_R) для розрахункової ізотропної області Ω має вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
 &\iint_{\Omega} \left\{ - \left[\frac{\partial \sigma_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2}{R_1} \sigma_{\varphi r} \right] \delta u_\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{R_1} \right] \delta u_r + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{1}{R_1} u_r - \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r) \right] \delta \sigma_\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\varphi) \right] \delta \sigma_r + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} - \frac{1}{R_1} u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{\sigma_{\varphi r}}{G} \right] \delta \sigma_{\varphi r} \right\} r d\varphi dr = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Після підстановки структур (21) або (23) у варіаційне рівняння Рейснера (25) і обчислення відповідних інтегралів (при $0 \leq \varphi \leq \gamma$, $R_1 \leq r \leq R$) крайова задача зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо сталих u_{rm} , $u_{\varphi m}$, σ_{rm} , $\sigma_{\varphi m}$, $\sigma_{r\varphi m}$ і σ_m , за значеннями яких визначаються переміщення і напруження, а також нормальне напруження σ_ψ на границі Γ_2 :

$$\sigma_\psi = f_2^2 \sigma_r - 2f_1 f_2 \sigma_{r\varphi} + f_1^2 \sigma_\varphi. \quad (26)$$

Чисельна реалізація розглянутої задачі виконана для ізотропного (модуль пружності $E = 196.2$ ГПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$) корпусу гідромотора з наступними геометричними параметрами: $a = 46.5$ мм; $R = 65$ мм; $R_1 = 28$ мм; $R_2 = 13.75$ мм. На рис. 8 штриховими лініями показано (числа біля графіків відповідають значенням радіуса R_2) розподіл наведеного напруження $\tilde{\sigma} = \sigma_\psi / q$ на контурі отвору.

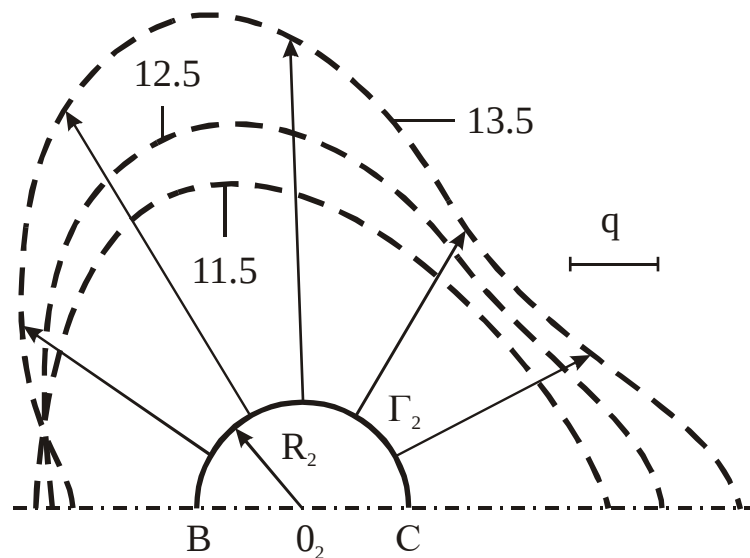


Рис. 8. Розподіл напруження $\tilde{\sigma}$ на контурі отвору

У табл. 2 і 3 для характерних точок досліджуваної періодичної області Ω представлені знайдені при різних значеннях міжцентрової відстані a і

радіуса R_2 кругового отвору безрозмірні наведені напруження $\tilde{\sigma}$ і наведені радіальні переміщення $\tilde{u}_r = u_r \rho / q$ (при $p = 10$ ТПа).

Таблиця 2. Значення $\tilde{\sigma}$ у характерних точках досліджуваної області Ω

a, мм	45		46.5		48		49.5	
R_2 , мм	11.5	13.75	11.5	13.75	11.5	13.75	11.5	13.75
$\tilde{\sigma}_A$	1.875	3.007	1.689	2.536	1.235	1.097	1.061	1.963
$\tilde{\sigma}_B$	1.288	0.542	1.490	1.086	1.590	1.585	1.371	2.265
$\tilde{\sigma}_{\max}$	2.784	5.867	2.651	5.273	2.427	4.389	3.070	6.637
$\tilde{\sigma}_C$	2.322	3.727	2.265	3.525	2.334	3.933	2.436	6.637
$\tilde{\sigma}_D$	1.584	3.312	1.835	4.049	2.203	5.242	3.118	9.750

Таблиця 3. Значення $\tilde{u}_r$ у характерних точках досліджуваної області Ω

a, мм	45		46.5		48		49.5	
R_2 , мм	11.5	13.75	11.5	13.75	11.5	13.75	11.5	13.75
$\tilde{u}_A$	1.6	0.283	0.756	0.8	0.813	1.168	0.806	1.397
$\tilde{u}_B$	0.37	0.129	0.483	0.588	0.532	0.888	0.504	1.08
$\tilde{u}_C$	3.626	6.562	3.775	6.973	3.956	7.557	4.381	9.828
$\tilde{u}_D$	3.248	6.107	3.415	6.594	3.647	7.246	4.111	9.555

З отриманих результатів випливає, що НДС корпусу гідромотора суттєво залежить від розмірів концентратора і від його розташування в досліджуваній області. Зокрема, при зміні величини радіуса R_2 від 11.5 мм до 13.75 мм максимальне напруження $\tilde{\sigma}_{\max}$, яке виникає на контурі Γ_2 отвору при $\psi = 65^\circ \div 85^\circ$, збільшується майже у два рази, а рівень напружень $\tilde{\sigma}$ при цьому

зменшується в точці В ($\psi = 0$) і збільшується в точці С ($\psi = 180^\circ$). Радіальне переміщення u_r має максимальне значення на перемичці CD, де воно майже на порядок більше, ніж на перемичці АВ (рис. 7). При збільшенні міжцентрової відстані a і відповідно зменшенні перемички CD околиця точки D стає не менш напруженою, чим контур Γ_2 отвору. Відзначимо, що отримані результати у вигляді встановлених залежностей НДС пружного корпусу від розмірів отворів і від їхнього розташування в розрахунковій області використані при проектуванні конкретного гідромотора. В даній роботі можливості варіаційного RVR-методу [337] наочно продемонстровано на прикладах виконання чисельного розв'язання важливих прикладних задачі при дослідженні напруженого стану циліндричного бандажа парової турбіни та корпусу гідромотора.

Отже, теоретично обґрунтований [336] чисельно-аналітичний RVR-метод розрахунку нетонких пружних оболонок з отворами може знайти ефективне застосування при проектуванні відповідальних статично навантажених оболонкових пружних елементів конструкцій у різних галузях сучасної техніки. При цьому програмно здійснюваний в RVR-методі алгоритм [335] апостеріорної інтегральної оцінки точності чисельних розв'язків варіаційних задач може стати надійним засобом перевірки достовірності одержуваних чисельних результатів, оскільки дозволяє автоматизувати пошук такої кількості апроксимацій, при якому процес збіжності розв'язків здобуває усталений характер.