

1.8 Дослідження нелінійної динаміки будівельних конструкцій методом граничних елементів

Розглянемо побудову диференціального рівняння плоского згину залізобетонної балки з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності матеріалів при складному навантаженні.

Так, навантаження балки не передбачається простим і тому для опису напружено-деформованого стану в бетоні замість деформационної теорії пластичності використовується теорія пластичної течії [147-153, 159].

Розглядається згин залізобетонної консольної балки прямокутного поперечного перерізу, що знаходиться під дією навантаження, прикладеного до кінців (рис. 1).

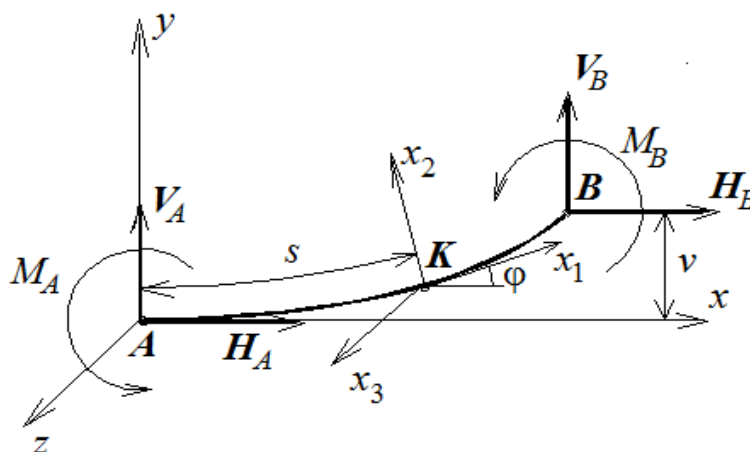


Рис. 1 Схема навантаження балки

Як прийнято в теорії пластичної течії, прирости деформацій можуть бути представлені у вигляді суми пружних і пластичних складових:

$$d[\varepsilon] = d[\varepsilon]_e + d[\varepsilon]_p. \quad (1)$$

Тут $d[\varepsilon] = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]$ (ε_{ij} – елементи тензора деформацій, передбачається, що балка знаходиться в стані плоскої деформації). Відповідно до асоційованого закону течії приріст пластичної деформації може бути представлений в наступному вигляді:

$$d[\varepsilon]_p = \vartheta \frac{\partial \Phi([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]}, \quad (2)$$

де Φ – функція навантаження, χ – параметр зміцнення [147-150,158], $[\sigma] = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]$, σ_{ij} – елементи тензора деформацій, ν_0 – коефіцієнт пропорційності. Відповідно до закону Гука можна записати

$$d[\sigma] = [D]_e d[\varepsilon]_e \quad (3)$$

($[D]_e$ – початкова матриця пружності). Зауважимо, що матриця $[D]_e$ для лінійно пружного ізотропного матеріалу в разі плоскої деформації має наступний вигляд:

$$[D]_e = \frac{2G_0}{1-\mu_0} \begin{bmatrix} 1 & \mu_0 & 0 \\ \mu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu_0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тут G_0 – модуль зсуву, $\mu_0 = \nu_0 / (1 - \nu_0)$, ν_0 – початковий коефіцієнт Пуассона.

Підставляючи (2) і (3) в (1), будемо мати:

$$d[\varepsilon] = [D]_e^{-1} d[\sigma] + \vartheta \frac{\partial \Phi([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]}. \quad (5)$$

Приймаючи, що:

$$d\chi = [\sigma]^T d[\varepsilon]_p \quad (6)$$

і слідуючи далі, отримуємо:

$$d[\sigma] = [D]_{ep} d[\varepsilon], \quad (7)$$

де

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \left\{ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} - \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} [\sigma]^T \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right\}^{-1} \quad (8)$$

Функцію навантаження будемо будувати в наступному вигляді:

$$\Phi([\sigma], \chi) = \Phi_l([\sigma]) + h(\chi) \quad (9)$$

($\Phi_l([\sigma])$ – функція, яка визначає граничну поверхню і умову міцності $\Phi_l([\sigma]) = 0$ в просторі напружень, $h(\chi)$ – функція зміцнення). Використовуємо умову міцності для плоского деформованого стану бетону, наведене в [154]:

$$\Phi_l([\sigma]) = 0, \quad (10)$$

$$\Phi_l([\sigma]) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(R_c - R_p)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 4\sigma_{12}^2 - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (10a)$$

Як вже помічалось, R_c і R_p – межі міцності матеріала при осьових стиску і розтязі.

Тут прийнято: $R_c = R_{bn} = f_{ck}$, $R_p = R_{btn} = f_{ctk}$.

Прийmemo:

$$h(\chi) = -\tilde{\Phi}_I(\tilde{\sigma}_{11}), \quad (11)$$

де через $\tilde{\Phi}_I(\tilde{\sigma}_{11})$ позначена $\Phi_I([\sigma])$ при осьовому розтязі (стиску) в умовах плоскої деформації, тобто:

$$\tilde{\Phi}_I(\tilde{\sigma}_{11}) = \tilde{\sigma}_{11}^2 + 2(R_c - R_p)\tilde{\sigma}_{11} - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (12)$$

Так як поточні значення напружень (тобто компоненти вектора $[\sigma]$) повинні лежати на поверхні навантаження, тобто повинні задовольняти рівнянню

$$\Phi([\sigma], \chi) = 0, \quad (13)$$

то рівність $\tilde{\Phi}_I(\tilde{\sigma}_{11}) = \Phi_I([\sigma])$ являє собою квадратне рівняння щодо $\tilde{\sigma}_{11}$, вирішуючи яке знаходимо:

$$\tilde{\sigma}_{11} = -(R_c - R_p) + \sqrt{(R_c - R_p)^2 + \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2 + \Phi_I([\sigma])}. \quad (14)$$

Знак плюс перед коренем обраний тому, що при деформаціях, близьких до одноосового розтягу (стиску), має виконуватися наступне співвідношення $\tilde{\sigma}_{11} \approx \sigma_{11}$.

Розглянемо тепер залізобетонний стержень, підданий одноосовому розтягу або стиску при плоскій деформації. Відповідно до деформаційної теорії пластичності бетону Г.А.Генієва можна записати наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_0, \tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0, \\ K(\varepsilon_0, \gamma_0) &= K_0g_1(\gamma_0)g_2(\varepsilon_0, \gamma_0), G(\gamma_0) = G_0g_1(\gamma_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут σ_0, γ_0 – октаедричні напруження:

$$g_1(\gamma_0) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\Gamma_c\kappa(\lambda, \delta)}\gamma_0, g_2(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 + \frac{g_0}{2\varepsilon_0}\gamma_0^2. \quad (16)$$

g_0 – модуль дилатації, K_0 і G_0 – початкові модулі об'ємного стиску і зсуву, Γ_c – гранична інтенсивність деформацій зсуву при чистому зсуві, а $\kappa(\lambda, \delta)$ визначається за формулою:

$$\kappa(\lambda, \delta) = \frac{\lambda(1+\delta)}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2(1+\delta)^2}{4} + 1 + \delta}. \quad (17)$$

У формулі (17):

$$\lambda = -f_0\sigma_0/T, \quad \delta = -e_0(S/T)^3, \quad S = \sqrt{3}(D_3/2)^{1/3}, \quad (18)$$

D_3 – третій інваріант девіатора напружень, $T = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_0$ – інтенсивність дотичних напружень, f_0 і e_0 – безрозмірні коефіцієнти:

$$f_0 = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}, \quad e_0 = \frac{R_c R_p}{3T_c^2} - 1, \quad (19)$$

T_c – граничне значення T при чистому зсуві. Зауважимо, що при даному напружено-деформованому стані стержня

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{(1+\nu)\tilde{\sigma}_{11}}{3}, \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} |\tilde{\sigma}_{11}| \sqrt{1-\nu+\nu^2}, \\ \varepsilon_0 &= \frac{\mu\tilde{\varepsilon}_{11}}{3}, \quad \gamma_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\tilde{\varepsilon}_{11}| \sqrt{1+\mu+\mu^2} \end{aligned} \quad (20)$$

($\tilde{\sigma}_{11}$ – нормальне напруження на площинці, перпендикулярній осі стержня,

$\tilde{\varepsilon}_{11}$ – поздовжня деформація, $\mu = \nu / (1-\nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона). Тоді враховуючи що:

$$D_3 = (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0), \quad (21)$$

формули (18) і (15) можна представити так:

$$\lambda = -\frac{f_0}{\sqrt{3}} \frac{1+\nu}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \quad \delta = -\frac{e_0}{2} \frac{(2-\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu+\nu^2)^{3/2}} \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \quad (22)$$

тому що $\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}_{11}) = \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11})$.

З (16) і (20) знаходимо:

$$f(\gamma_0) = 1 - \frac{\sqrt{3(1+\mu+\mu^2)}}{3\Gamma_c \kappa(\lambda, \delta)} |\tilde{\varepsilon}_{11}|, \quad g(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 + \frac{4g_0(1+\mu^2+\mu^4)}{1-\mu} \tilde{\varepsilon}_{11}. \quad (23)$$

Використовуючи (15), відому формулу $\nu = [3K(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G(\gamma_0)] / \{2[G(\gamma_0) + 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)]\}$ можна представити так:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{3K_0 g(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G_0}{G_0 + 3K_0 g(\varepsilon_0, \gamma_0)}. \quad (24)$$

З (17), (18) і (23) випливає, що при заданому $\tilde{\varepsilon}_{11}$ рівність (24) являє собою рівняння щодо ν . Його можна вирішити, наприклад, методом послідовних наближень. Задаваючись початковим значенням $\nu = \nu_0$ (ν_0 - коефіцієнт Пуассона бетону в лінійно-пружній стадії) і підставляючи його в праву частину (24), після кількох кроків знаходимо значення ν . Після цього визначаємо $g_1(\gamma_0)$ і $g_2(\varepsilon_0, \gamma_0)$ з (23) і за формулою:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{E} \tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{E} = \frac{3K_0 g_1(\gamma_0) g_2(\varepsilon_0, \gamma_0) (1 - 2\nu)}{1 - \nu^2}, \quad (25)$$

що є наслідком (15) і (20), знаходимо $\tilde{\sigma}_{11}$. Таким чином може бути побудована функціональна залежність $\tilde{\sigma}_{11}$ від $\tilde{\varepsilon}_{11}$, графік якої для бетону з

$R_c = 19,6 \text{ МПа}$, $R_p = 1,96 \text{ МПа}$ і $T_c = 3,4 \text{ МПа}$ для випадку стиску представлена рис. 2. Апроксимуючи висхідну гілку кубічною параболою, отримуємо:

$$\tilde{\sigma}_{11} = A_c \tilde{\varepsilon}_{11} + B_c \tilde{\varepsilon}_{11}^2 + C_c \tilde{\varepsilon}_{11}^3 \quad (26)$$

(в разі розтягу A_c, B_c, C_c замінюються коефіцієнтами A_p, B_p, C_p).

В даному випадку

$$d\chi = \tilde{\sigma}_{11} d\tilde{\varepsilon}_{11p} \quad (27)$$

($\tilde{\varepsilon}_{11p}$ – пластична деформація стержня). Тоді

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \chi} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{11}} \tilde{E}_{\tau p}, \tilde{E}_{\tau p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11p}}. \quad (28)$$

Тут $\tilde{E}_{\tau p}$ – пластичний модуль пружності для плоскої деформації. Представимо його так:

$$\tilde{E}_{\tau p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11} - \partial \tilde{\varepsilon}_{11e}} = \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11}} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11e}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11}} \right)^{-1} = \frac{\tilde{E}_{\tau} \tilde{E}_0}{\tilde{E}_0 - \tilde{E}_{\tau}}, \quad (29)$$

де $\tilde{E}_{\tau}$ може бути отримано диференціюванням (26), а $\tilde{E}_0 = 3K_0 \frac{1 - 2\nu_0}{1 - \nu_0^2}$

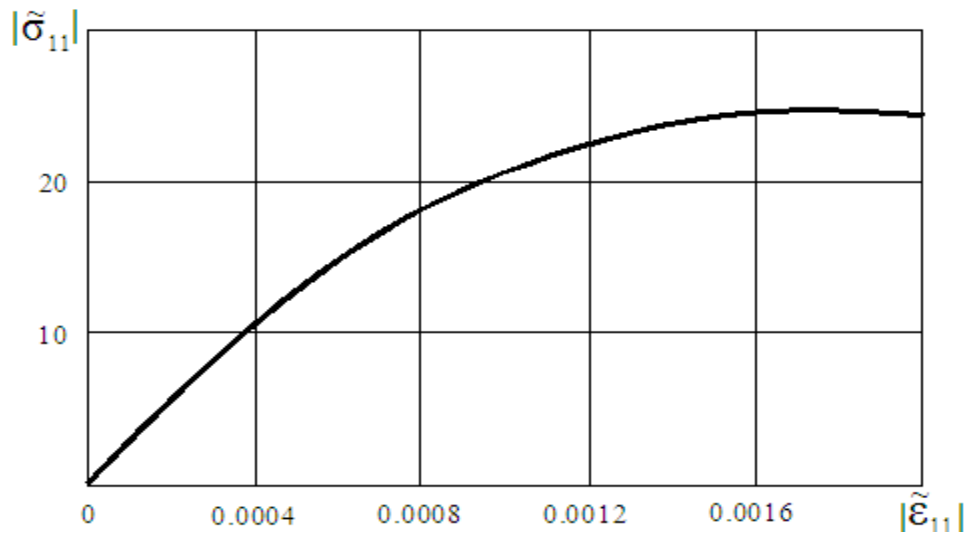


Рис. 2. Графік висхідній гілки діаграми деформування бетону

відповідно до (25).

З (9), (11), (12) і (28) знаходимо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = -\frac{\partial h}{\partial \chi} = -2[\tilde{\sigma}_{11} - (R_c - R_p)] \frac{\tilde{E}_{\text{тп}}}{\tilde{\sigma}_{11}}. \quad (30)$$

Решта величин, що входять в (8), легко визначаються з (10а):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{11}} &= 2[\sigma_{11} - \sigma_{22} - (R_c - R_p)], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{22}} &= -2[\sigma_{11} - \sigma_{22} + R_c - R_p], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{12}} = 8\sigma_{12}. \end{aligned} \quad (31)$$

Переходимо тепер до визначення приростів деформацій $d[\varepsilon]$. Враховуючи, що величина λ_s пов'язана з відносним подовженням осі стержня ε_s співвідношенням:

$$\lambda_s = 1 + \varepsilon_s,$$

де $\varepsilon_s \ll 1$, формулу можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(s, x_2) &= \varepsilon_s(s) - B(s, x_2)\phi'(s), \\ \varepsilon_{22}(s, x_2) &= 0.5[A_2^2(s, x_2) + B_2^2(s, x_2) - 1], \\ \varepsilon_{12}(s, x_2) &= 0.5A_2(s, x_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Тут

$$\begin{aligned} A(s, x_2) &= a_1(s)x_2 + a_2(s)x_2^2 + a_3(s)x_2^3, B(s, x_2) = b_1(s)x_2 + b_2(s)x_2^2, \\ A_2(s, x_2) &= a_1(s) + 2a_2(s)x_2 + 3a_3(s)x_2^2, B_2(s, x_2) = b_1(s) + 2b_2(s)x_2, \end{aligned} \quad (33)$$

s – абсциса, а x_2 – ордината розглянутої матеріальної точки K в недеформованому стані балки, ϕ – кут повороту поперечного перерізу. Тут і нижче штрих означає диференціювання по s .

З (32) і (33) отримуємо:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= d\varepsilon_s - dB\phi' - Bd\phi', d\varepsilon_{22} = A_2 dA_2 + B_2 dB_2, d\varepsilon_{12} = 0.5dA_2, \\ dA &= da_1 x_2 + da_2 x_2^2 + da_3 x_2^3, dB = db_1 x_2 + db_2 x_2^2, \\ dA_2 &= da_1 + 2da_2 x_2 + 3da_3 x_2^2, dB_2 = db_1 + 2db_2 x_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Використовуємо тепер граничні умови на верхній і нижній гранях балки:

$$d\sigma_{22} = 0, d\sigma_{12} = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2. \quad (35)$$

З (7) випливає:

$$\begin{aligned} d\sigma_{11} &= D_{ep,1,1}d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,1,2}d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,1,3}d\varepsilon_{1,2}, \\ d\sigma_{22} &= D_{ep,2,1}d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,2,2}d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,2,3}d\varepsilon_{1,2}, \\ d\sigma_{12} &= D_{ep,3,1}d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,3,2}d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,3,3}d\varepsilon_{1,2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Підставляючи (34) в (36), а потім (36) в (35), отримуємо:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} da_k = W_{i,2} d\xi_2 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} da_4 &= db_1, da_5 = db_2, da_6 = d\varepsilon_s, d\xi_2 = d\phi', \\ U_{i,1} &= D_{ep,j,2}^{\pm} A_2^{\pm} + \frac{1}{2} D_{ep,j,3}^{\pm}, U_{i,2} = \pm (D_{ep,j,2}^{\pm} A_2^{\pm} + \frac{1}{2} D_{ep,j,3}^{\pm}) h, \\ U_{i,3} &= \frac{3}{4} (D_{ep,j,2}^{\pm} A_2^{\pm} + \frac{1}{2} D_{ep,j,3}^{\pm}) h^2, U_{i,4} = -(\pm D_{ep,j,1}^{\pm} \phi' \frac{h}{2} - D_{ep,j,2}^{\pm} B_2^{\pm}), \\ U_{i,5} &= (-D_{ep,j,1}^{\pm} \phi' \frac{h}{4} \pm D_{ep,j,2}^{\pm} B_2^{\pm}) h, U_{i,6} = D_{ep,j,1}^{\pm}, W_{i,2} = -D_{ep,j,1}^{\pm} B^{\pm}. \end{aligned} \quad (37a)$$

Тут $j = 2$ при $i = 1, 2$ і $j = 3$ при $i = 3, 4$; знак $+$ в двузначчі $\pm$ береться при $i = 1, 3$ і знак $-$ при $i = 2, 4$. Верхній індекс «плюс» означає, що значення відповідної функції ($D_{ep,j,m}(s, x_2)$, $A_2(s, x_2)$ и т.д.) береться при $y_2 = h/2$, а верхній індекс «мінус» – при $y_2 = -h/2$.

З рівноваги відрізка AM балки (рис. 1) випливає:

$$dQ + dV_A + dH_A = 0. \quad (38)$$

Тут Q – головний вектор внутрішніх сил, прикладених до поперечного перерізу.

При цьому:

$$dQ = dQ_b + dQ_{au} + dQ_{ad} \quad (39)$$

(Q_b – головний вектор внутрішніх сил в бетоні, Q_{au} – у верхній арматурі, Q_{ad} – в нижній).

Проектуючи рівність (38) на осі y_i ($i = 1, 2$) з урахуванням (39) будемо мати:

$$dQ_{b,i} + dQ_{au,i} + dQ_{ad,i} + dV_{A,i} + dH_{A,i} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (40)$$

Очевидно, що:

$$\begin{aligned} dQ_{b,i} &= b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{1,i}(y_2) dy_2, \quad dQ_{au,1} = E_a d\varepsilon_{1,1}(h_1) S_1, \quad dQ_{ad,1} = E_a d\varepsilon_{1,1}(-h_2) S_2, \\ dQ_{au,2} &= G_a d\varepsilon_{1,2}(h_1) S_1, \quad dQ_{ad,2} = G_a d\varepsilon_{1,2}(-h_2) S_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Тут E_a , G_a – модуль пружності і модуль зсуву арматури, вона припускається близькою до ідеально пружної; h_1 – ордината центра ваги верхньої арматури, h_2 – нижній, S_1 і S_2 – площі їх поперечних перерізів.

Використовуючи (34) і (36), приходимо до наступних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} da_k = W_{i,1} d\zeta_1 + W_{i,2} d\zeta_2 + W_{i,3} d\zeta_3 + W_{i,4} d\zeta_4 \quad (i = 5, 6), \quad (42)$$

де $d\zeta_1 = d\varphi$, $d\zeta_3 = d\xi$, $d\zeta_4 = d\eta$,

$$\begin{aligned} U_{i,1} &= [D_{ep,j,2} + 0.5\{[D_{ep,j,3} + \delta_{i,6} G_a (S_1 + S_2)\}], \quad U_{i,2} = 2[D_{ep,j,2} + \\ &+ [D_{ep,j,3} + \delta_{i,6} G_a (S_1 h_1 - S_2 h_2)], \quad U_{i,3} = 3[D_{ep,j,2} + 1.5\{[D_{ep,j,3} + \\ &+ \delta_{i,6} G_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2)\}], \quad U_{i,4} = -[D_{ep,j,1} \varphi' + [D_{ep,j,2} - \\ &- \delta_{i,5} E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2) \varphi'], \quad U_{i,5} = -[D_{ep,j,1} \varphi' + 2[D_{ep,j,2} - \\ &\delta_{i,5} E_a (S_1 h_1^2 - S_2 h_2^2) \varphi'], \quad U_{i,6} = [D_{ep,j,1} + \delta_{i,5} E_a (S_1 + S_2), \\ W_{5,1} &= H_0 (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi), \quad W_{i,2} = [D_{ep,j,1} + \delta_{i,5} E_a \{S_1 B(h_1) - S_2 B(-h_2)\}], \\ W_{5,3} &= H_0 \sin \varphi, \quad W_{5,4} = -H_0 \cos \varphi, \\ W_{6,1} &= H_0 (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi), \quad W_{6,3} = -H_0 \cos \varphi, \quad W_{6,4} = -H_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (43)$$

($j = 1$ при $i = 5$ и $j = 3$ при $i = 6$, $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера).

Введено наступні позначення:

$$[f(y_2)]^\# = b \int_{-h/2}^{h/2} f(y_2) dy_2, H_0 = \frac{H}{l^2}, H = \frac{E_b b h^3}{12(1-\nu_0^2)} + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2),$$

($\xi = H_A / H_0$, $\eta = V_A / H_0$, E_b – початковий модуль пружності бетону).

Запишемо (37) і (42) у вигляді єдиної системи рівнянь:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} da_k = W_{i,1} d\zeta_1 + W_{i,2} d\zeta_2 + W_{i,3} d\zeta_3 + W_{i,4} d\zeta_4 \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (44)$$

причому $W_{i,j} = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 3, 4$).

Позначимо через $[d^{(m)}]$ ($m = 1, 2, 3, 4$) рішення лінійних систем рівнянь:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} d_k^{(m)} = W_{i,m} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; m = 1, 2, 3, 4). \quad (45)$$

Очевидно, що рішення системи (44) може бути представлене в такий спосіб:

$$da_i = d_i^{(1)} d\phi + d_i^{(2)} d\phi' + d_i^{(3)} d\zeta + d_i^{(4)} d\eta, \quad (46)$$

причому $d_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$; $j = 1, 2, 3, 4$) не залежать від $d\phi, d\phi', d\zeta$ и $d\eta$.

Знайдемо тепер головний момент приросту внутрішніх сил в поперечному перерізі щодо осі y_3 , що проходить через центр перерізу і перпендикулярна осям y_1 і y_2 :

$$dM_3 = dM_{b,3} - h_1 dQ_{au,1} + h_2 dQ_{ad,1},$$

$$dM_{b,3} = -b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{11} y_2 dy_2. \quad (47)$$

Використовуючи (34), (36) і (41), отримуємо:

$$dM_3 = \sum_{k=1}^6 U_{7,k} da_k - W_{7,2} d\phi', \quad (48)$$

$$\begin{aligned} U_{7,1} &= -[D_{ep,1,2} A_2 y_2]^\# - 0.5\{[D_{ep,1,3} y_2]^\#, U_{7,2} = -2[D_{ep,1,2} A_{22}^2]^\# - \\ &- [D_{ep,1,3} y_2^2]^\#, U_{7,3} = -3[D_{ep,1,2} A_2 y_2^3]^\# - 1.5\{[D_{ep,1,3} y_2^3]^\#, U_{7,4} = \\ &= [D_{ep,1,1} y_2^2]^\# \phi' - [D_{ep,1,2} B_2 y_2]^\# + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) \phi', U_{7,5} = [D_{ep,1,1} y_2^3]^\# \phi' - \\ &- 2[D_{ep,1,2} B_2 y_2^2]^\# + E_a (S_1 h_1^3 - S_2 h_2^3) \phi', U_{7,6} = -[D_{ep,1,1} y_2]^\# - E_a (S_1 h_1 - \\ &- S_2 h_2), W_{7,2} = -[D_{ep,1,1} B y_2]^\# + E_a \{S_1 B(h_1) h_1 - S_2 B(-h_2) h_2\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Підставивши (46) в (48), матимемо:

$$dM_3 = Y_1 d\phi + Y_2 d\phi' + Y_3 d\xi + Y_4 d\eta,$$

$$Y_j = \sum_{k=1}^6 U_{7,k} da_k^{(j)} - \delta_{1,j} W_{7,2} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (50)$$

Використовуючи (38), неважко перекоонатися в тому, що

$$dQ_2 = R_1 d\phi + R_2 d\xi + R_3 d\eta, \quad (51)$$

$$R_1 = -H_0 (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi), R_2 = -H_0 \sin \phi, R_3 = H_0 \cos \phi.$$

Скористаємося співвідношенням:

$$dM'_3 = -dQ_2$$

Підставивши сюди (50) і (51), приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$d\phi'' + Z_1 d\phi' + Z_2 d\phi + Z_3 d\xi + Z_4 d\eta = 0, \quad (52)$$

$$Z_1 = (Y'_1 + Y_2)/Y_1, Z_2 = (Y'_2 - R_1)/Y_1, Z_3 = (Y'_3 - R_2)/Y_1, Z_4 = (Y'_4 - R_3)/Y_1.$$

Отже, було побудовано диференціальне рівняння (52) згину елемента залізобетонної каркасної споруди відносно приростів кутів повороту поперечних перерізів для покрокового методу вирішення квазістатичних і динамічних задач [155-157].