

SECTION 13. MECHANICS

DOI: 10.46299/ISG.2024.MONO.TECH.1.13.1

13.1 Вплив нестационарного навантаження і пружності середовища на динамічну поведінку тришарових оболонкових структур

Досягнення останнього часу в галузі досліджень динаміки композитних оболонкових структур стали результатом розвитку математичного моделювання динамічних процесів, виникаючих в цих структурах і вдосконалення розрахункових методів оцінки ефективності цих процесів. Врахування специфіки і значимості, маючих місце, впливів на такі структури. В останньому випадку недостатньо вирішеними залишаються задачі оцінки взаємодії оболонкових структур з пружним середовищем. Відома відносно незначна кількість публікацій, приурочених цій тематиці [400-402], де приводяться результати оцінки подібного впливу, визначені на основі моделі Вінклера [403]. Являючись відносно простою, ця модель дозволяє характеризувати вплив пружного середовища на досліджувані структури з допомогою лише одного коефіцієнта (коефіцієнта пружної основи).

Зв'язок між реакцією пружного середовища $\tilde{R}(x, s, t)$ і радіальними переміщеннями точок серединної поверхні оболонки $u_3(x, s, t)$ у випадку моделі Вінклера має вигляд:

$$\tilde{R}(x, s, t) = C_1 u_3(x, s, t), \quad (1.1)$$

де C_1 – коефіцієнт постелі пружної основи, який характеризує роботу на розтяг - стиск; x, s – основа та окружна координата серединної поверхні оболонки і t – часова координата.

У більшості випадків такий підхід забезпечує необхідну точність оцінки визначення впливу пружного середовища на поведінку шаруватих структур [402].

Вимоги до міцності і ваги, що пред'являються до сучасних конструкцій, весь час зростають, а умови їх експлуатації стають більш жорсткими і

потребують забезпечення цілої низки іноді навіть суперечливих вимог. В цій ситуації позитивному розв'язанню задачі визначення впливу пружного середовища при аналізі елементів оболонкової структури в значній мірі сприяє використання зсувної моделі теорії оболонок і стержнів С.П. Тимошенко [404, 405] і варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона-Остроградського.

З цих позицій розглядаються тришарові циліндричні елементи оболонки (рис. 1) кругового ($a=b$) і еліптичного ($a \neq b$) перерізу, армовані дискретними ребрами (рис. 1), які знаходяться в безінерційному пружному середовищі і являють собою пружні структури, які складаються з внутрішньої (індекс 1), зовнішньої (індекс 2) несучих оболонок, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками.

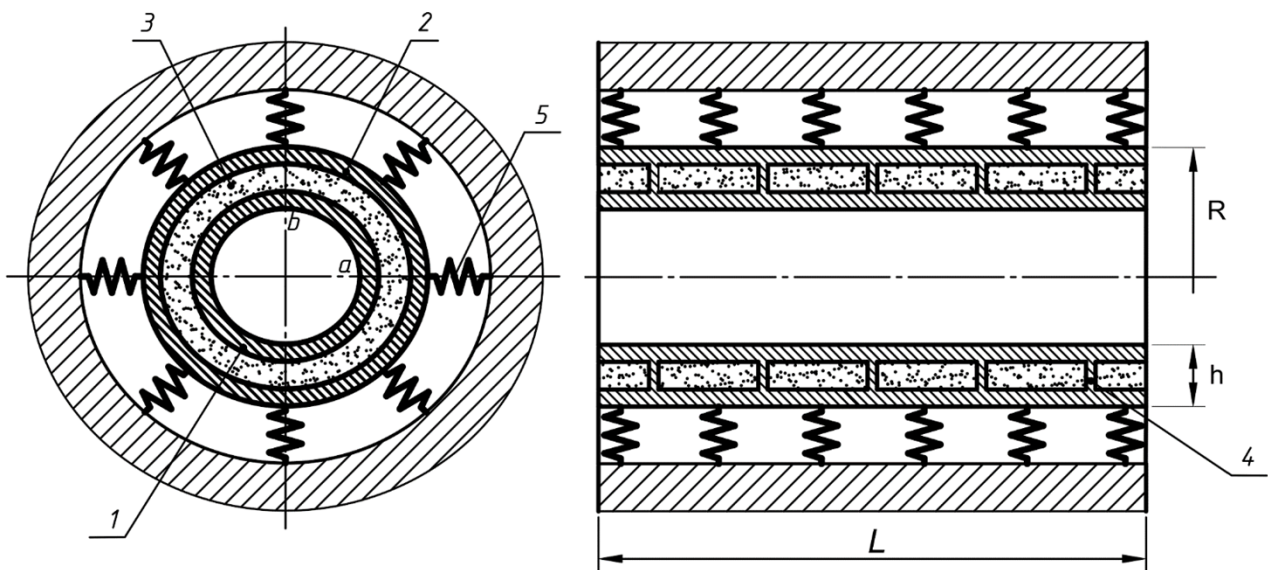


Рисунок 1. Конструкція тришарової циліндричної оболонки кругового та еліптичного перерізу з полімерним заповнювачем армованим ребрами жорсткості:

- 1 – внутрішній шар; 2 – зовнішній шар; 3 – полімерний заповнювач (t);
4 – армуючі ребра (j); 5 – пружне середовище Вінклера

Елемент кругового перерізу має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з осьовою лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні.

Циліндричну оболонку віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат (s_1, s_2, z) , де s_1, s_2, z – довжини твірної, напрямної та нормалі до серединної поверхні. Вважається, що величина z є додатною якщо розглядаємо точку знаходиться з боку опуклості серединної поверхні.

Основа на варіаційному принципі стаціонарності Гамільтона-Остроградського:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0 \quad (1.2)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи і пружного середовища Вінклера, K – повна кінетична енергія пружної системи, A – робота зовнішніх сил, t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу, рівняння коливань оболонки кругового перерізу після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі набуває вид [405]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^1}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^1}{\partial x} - \frac{T_{11}^1}{R_1} - \frac{1}{R_t h_t} M_{11}^t - \frac{4}{h_t^2} M_3^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} + \left(1 + \frac{h_1}{2R_t} \right) P_1 &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^1}{\partial x} - T_{13}^1 + \frac{2h_1}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{11}^2}{\partial x} - \frac{T_{13}^t}{R_t} &= \left(\rho_2 h_2 + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^2}{\partial x} - \frac{T_{11}^2}{R_1} - \frac{1}{R_t h_t} M_{11}^t - \frac{4}{h_t^2} M_3^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^2}{\partial x} - C_1 u_3^2 &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^2}{\partial x} - T_{13}^2 + \frac{2h_2}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_2 \frac{h_2^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_t} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{8}{h_t^2} M_3^t - \frac{1}{R_t} T_{11}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_3^t}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\left[T_{11}^{i\pm}\right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}^1}{\partial t^2}, \quad \left[T_{13}^{i\pm}\right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}^1}{\partial t^2}, \quad \left[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}\right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}.$$

А при еліптичному перерізі циліндричної структури [406]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} - C_1 u_3 + P_3(s_1, s_2, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В цих рівняннях позначення C_1 – коефіцієнт Вінклера пружної основи.

Приведені системи рівнянь дозволяють описувати динамічну поведінку оболонкових структур кругового і еліптичного перерізу. Складність розв’язання задач з урахуванням дискретності армуючих ребер полімерного заповнювача, наявності в них розривних коефіцієнтів, приводить до створення чисельних алгоритмів які «склеюються» в гладкій області на лініях розривів, розрахунки таких задач дозволяють здійснювати скінченно-елементні комплекси. Тому при розв’язанні таких задач доцільно використовувати скінченно-елементний метод [407].

Обидві оболонки мають близькі по величині показники геометричних і фізико-механічних параметрів несучих шарів, а величини діючого внутрішнього навантаження і пружного зовнішнього середовища є однаковими. В структурі кругового перерізу несучі шари мають однакову товщину і виготовлені із однакового матеріалу. Їх характеристики мають наступні величини:

$$\frac{L}{h_1} = 200; h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; \frac{R_1}{h_1} = 40; \frac{H_j}{h_1} = 10; F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0.33;$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

В структурі еліптичного перерізу ці параметри відповідають таким значенням

$$h = 0,01 \text{ м}; h_1 = h_2 = 0,001; L_1 = 0,4 \text{ м}; E_1 = E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0.33 \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Параметри еліптичного поперечного перерізу: $a/b = 1,1$.

Армуючі ребра структури (паралелі) розташовані в таких її точках:

$$x_j = [16 + 17(k-1)]\Delta x, \quad k = \overline{1, 5}, \quad \Delta x = \frac{L_1}{100},$$

Розподілене внутрішнє навантаження обох структур відповідало закону:

$$P(t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)], \quad (1.5)$$

де: A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульсу навантаження;

$T = R/c$, де c – швидкість звуку в металі несучих оболонок; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. Розрахунки виконувались для $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Коефіцієнти Вінклера приймалися: $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ та $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$.

При розрахунках показників напружено-деформованого стану структур були створені скінченно-елементні моделі і визначені максимальні величини нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) і напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів зазначених структур.

При створенні у програмному середовищі *NASTRAN* адекватних скінченно-елементних моделей тришарових циліндричних оболонок використовувалися об'ємні скінченні елементи типу *Solid*, а для моделювання пружної основи у рамках гіпотези Вінклера – одномірні скінченні елементи типу *Spring*, розташовані по довжині оболонки [408].

Модель тришарової циліндричної структури кругового перерізу (рис. 2) налічувала: 184100 елементів і 194400 вузлів. В структурі еліптичного перерізу кількість скінченних елементів *Solid* становила 120000 елементів, а вузлів – 141400. Кількість елементів *Spring* в першому випадку становила 8100, а у другому – 20200.

Створені скінченно-елементні моделі оболонок відображають взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій тришарової структури з енергією мас та доданих інерційних сил згідно принципу Д'аламбера:

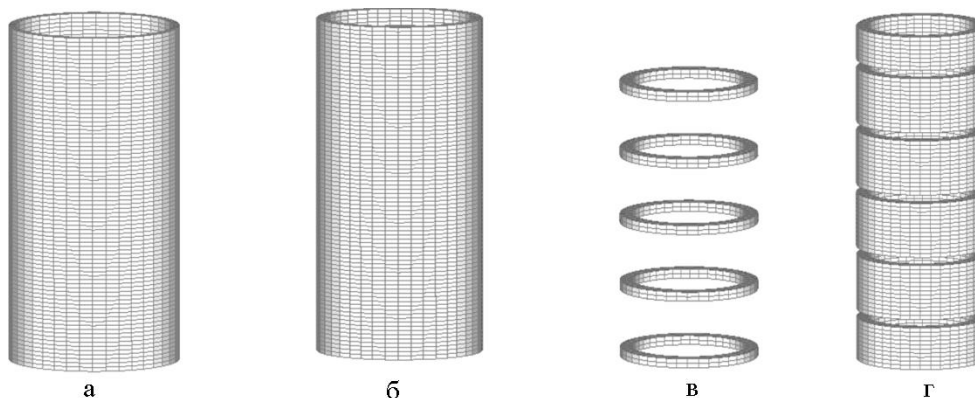


Рисунок 2. Скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки нормального кругового перерізу:

а – обшивка несуча внутрішня; б – теж саме зовнішня; в – армуючі ребра; г – полімерний заповнювач

$$\Pi = E - W, \quad (1.6)$$

де E – потенціальна енергія деформацій і основи, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.6) матиме наступний вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)} \quad (1.7)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (1.8)$$

записуються наступним чином:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$$

Розрахунки напружено-деформованого стану структур здійснювались програмно-розрахунковим комплексом *NASTRAN* алгоритмом прямого перехідного динамічного процесу в часовому інтервалі $0 \leq t \leq 10T$. Розглядалися варіанти жорсткого і шарнірного закріплення торців структур. Результати розрахунків приведені на рис. 3 – рис. 8.

На графіках рис. 3, а зображено залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки кругового перерізу на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8$ Н/м³ суцільна лінія при $t = 4,3T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³ і пунктирна лінія при $t = 4,8T$) від позовжньої координати X . Торці оболонки жорстко защемлені. Пінопласт $E_1^1 / E_1^t = 50$. На рис. 3, б зображені відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів цієї структури від координати X .

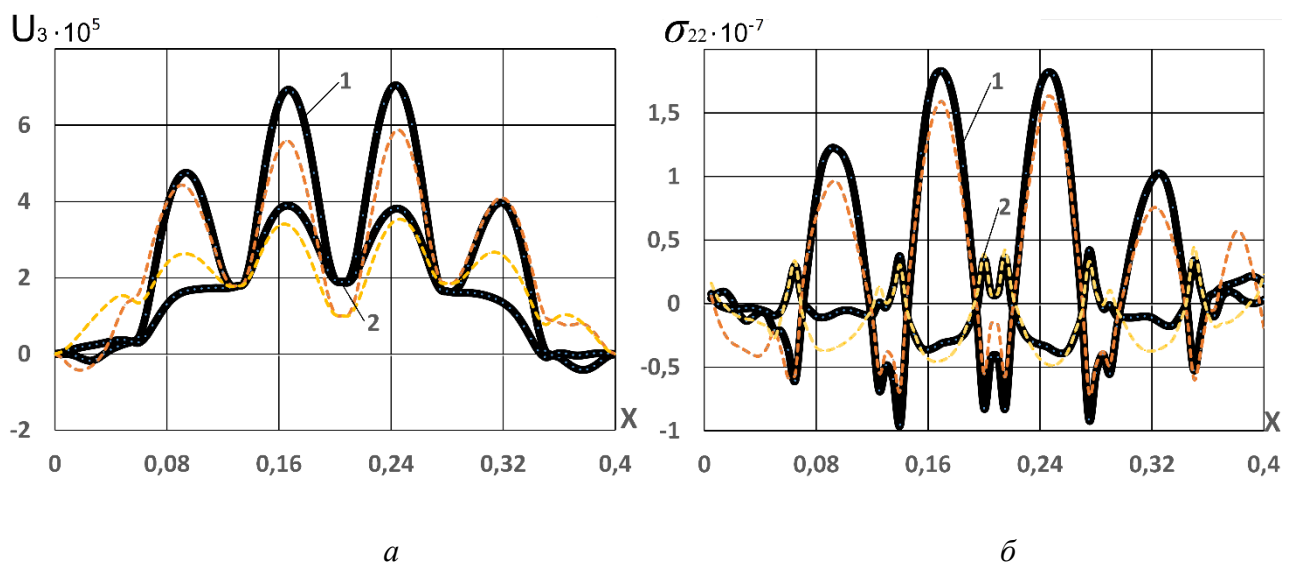


Рисунок 3. Максимальні величини прогинів і напружень в серединних поверхнях несучих шарів

при жорсткому затисненні торців циліндричної структури кругового перерізу:

а) нормальні прогини $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$; б) нормальні напруження $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$

На графіках (рис. 4, а) зображено залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8$ Н/м³ суцільна лінія при $t = 4,3T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³ пунктирна лінія при $t = 4,75T$) від позовжньої координати X . Торці оболонки шарнірно закріплені, наявність пінопласту $E_1^1 / E_1^t = 50$ при $t = 4,3T$.

На рис. 4, б зображені відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x .

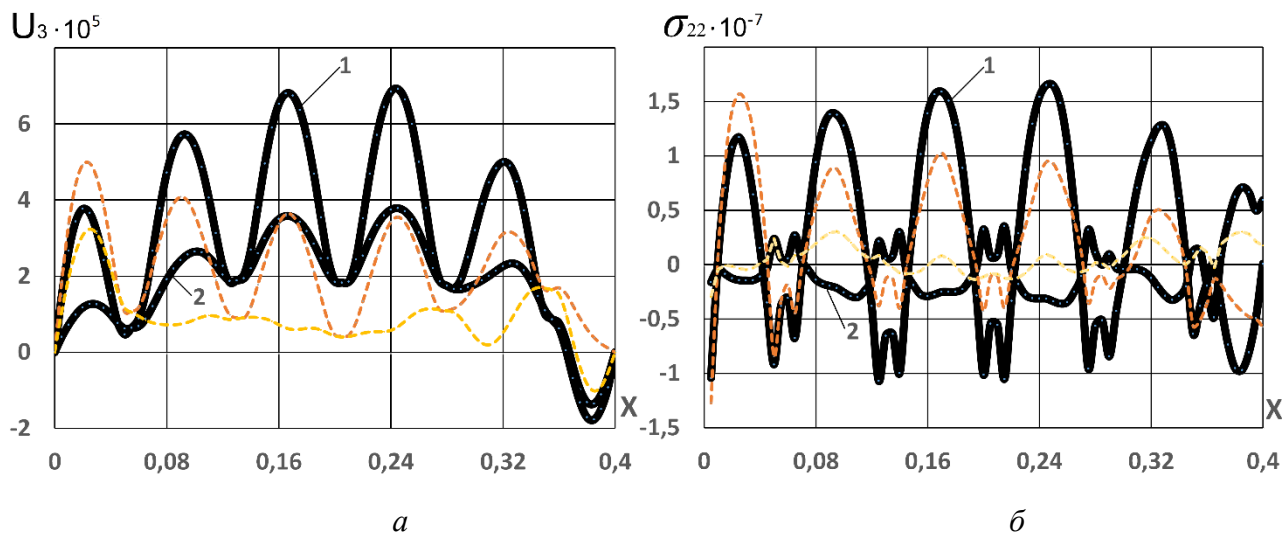


Рисунок 4. Максимальні величини прогинів і напружень в серединних поверхнях несучих шарів

при шарнірному затисненні торців циліндричної структури кругового перерізу:

а) нормальні прогини u_3^1 (1) і u_3^2 (2); б) нормальні напруження σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)

На графіках рис. 5, а зображені залежності максимальних величин

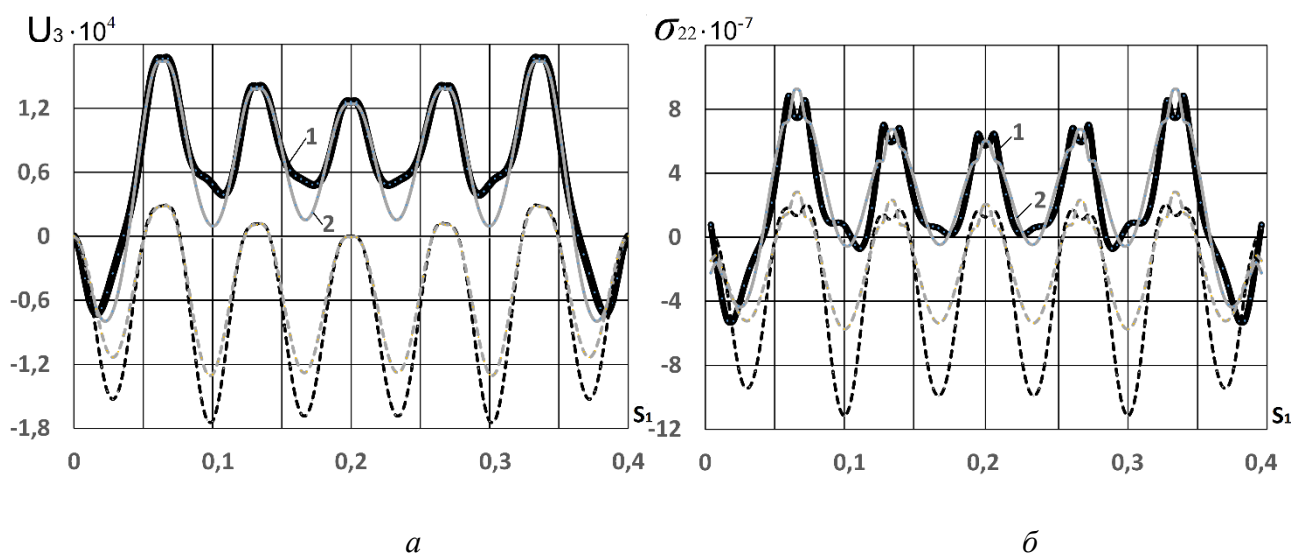


Рисунок 5. Максимальні величини прогинів і напружень в серединних поверхнях несучих шарів при жорсткому затисненні торців циліндричної структури

еліптичного перерізу ($s_2 = L_2/4$):

а) нормальні прогини u_3^1 (1) і u_3^2 (2); б) нормальні напруження σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)

нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів симетричної тришарової циліндричної оболонки у пружному середовищі Вінклера ($C_1=1\cdot10^8$ Н/м³ суцільна лінія при $t = 8,6T$; $C_1=1\cdot10^9$ Н/м³ пунктирна лінія при $t = 8,9T$) від поздовжньої координати s_1 в перерізі $s_2 = L_2/4$.

Торці оболонкової структури жорстко затиснені. Пінопласт із співвідношенням модулів пружності несучого шару і заповнювача $E_1^1 / E_1^t = 500$.

На рис. 5б зображені відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів циліндричної структури від координати s_1 в перерізі $s_2 = L_2/4$.

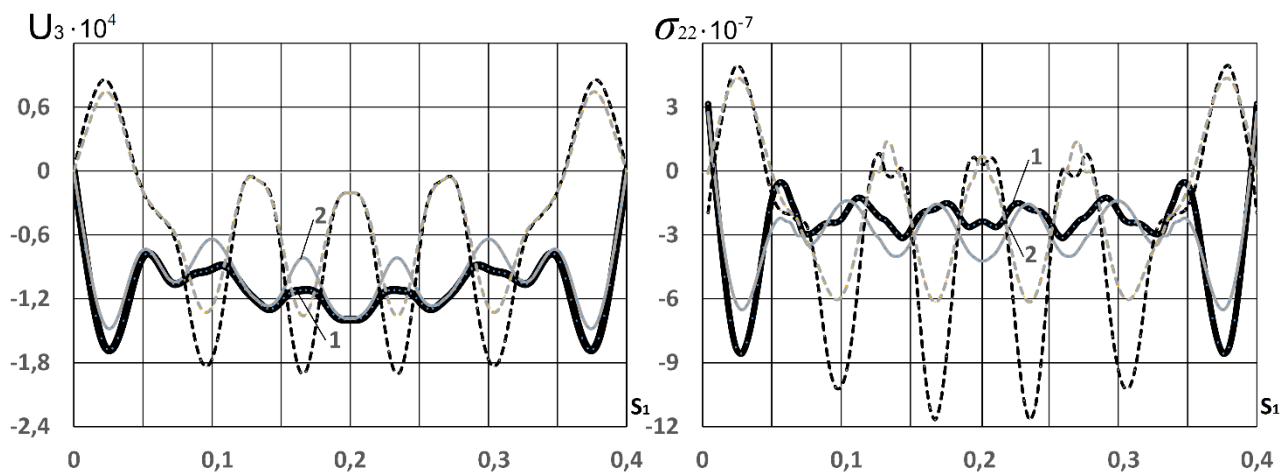


Рисунок 6. Максимальні величини прогинів і напружень в серединних поверхнях несучих шарів при шарнірному затисненні торців циліндричної структури еліптичного перерізу ($s_2 = L_2/4$):

а) нормальні прогини u_3^1 (1) і u_3^2 (2); б) нормальні напруження σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)

На графіках рис. 6, а приведені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1=1\cdot10^8$ Н/м³ суцільна лінія при $t = 4,7T$; $C_1=1\cdot10^9$ Н/м³ пунктирна лінія при $t = 8,85T$) від поздовжньої координати s_1 в перерізі $s_2 = L_2/4$. Торці оболонки шарнірно закріплені. Структура із пінопластом співвідношенням модулів пружності $E_1^1 / E_1^t = 500$.

На рис. 6, б приведені відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати s_1 в перерізі $s_2 = L_2/4$.

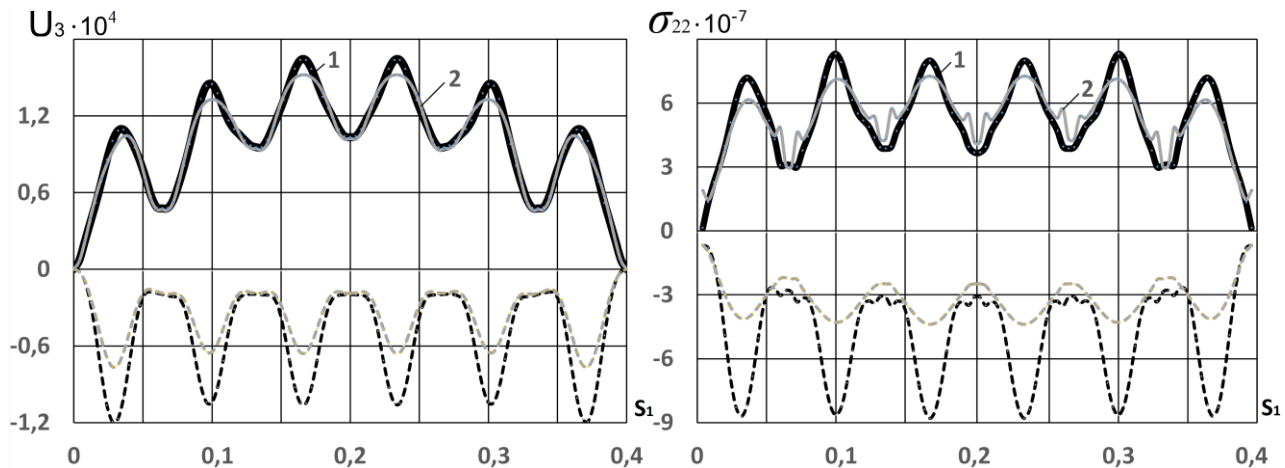


Рисунок 7. Максимальні величини прогинів і напружень в серединних поверхнях несучих шарів при жорсткому затисненні торців циліндричної структури еліптичного перерізу ($s_2 = 0$):

а) нормальні прогини u_3^1 (1) і u_3^2 (2); б) нормальні напруження σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)

На графіках рис. 7, а зображені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки у пружному середовищі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8$ Н/м³ суцільна лінія при $t = 3,65T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³ пунктирна лінія при $t = 2T$) від поздовжньої координати s_1 в перерізі $s_2 = L_2/4$. Торці оболонки жорстко затиснені. Пінопласт із співвідношенням модулів пружності несучого шару і заповнювача $E_1^1 / E_1^t = 500$.

На рис. 7, б зображені відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів циліндричної структури від координати s_1 в перерізі $s_2 = 0$.

На графіках рис. 8, а приведені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8$ Н/м³ суцільна лінія при $t = 6,3T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³ пунктирна лінія при $t =$

2,15T) від поздовжньої координати s_1 в перерізі $s_2 = 0$. Торці оболонки шарнірно закріплені пінопласт $E_1^1 / E_1^t = 500$.

На рис. 8, б приведені відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати s_1 в перерізі $s_2 = 0$.

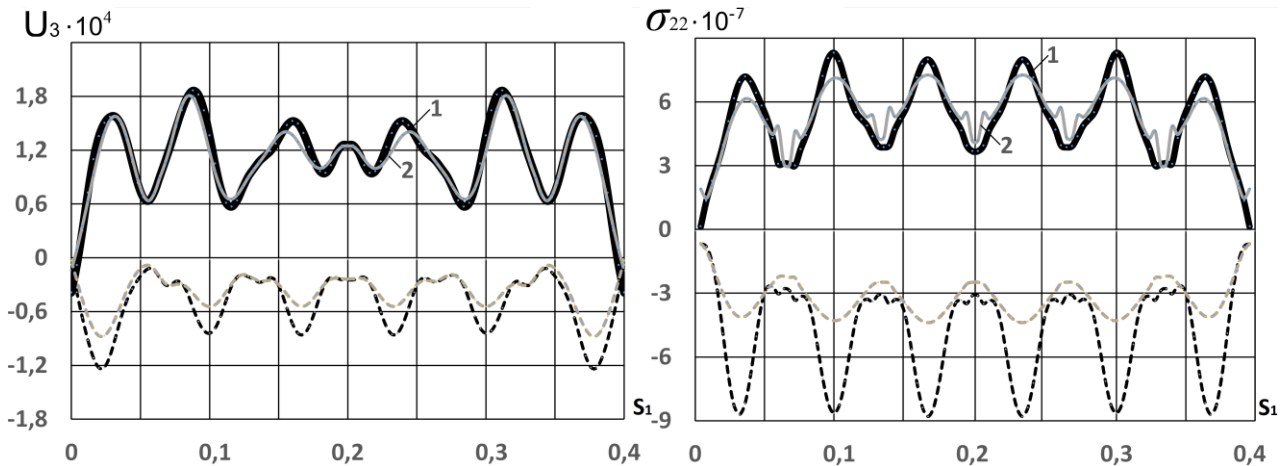


Рисунок 8. Максимальні величини прогинів і напружень в серединних поверхнях несучих шарів при шарнірному затисненні торців циліндричної структури еліптичного перерізу ($s_2 = 0$):

а) нормальні прогини u_3^1 (1) і u_3^2 (2); б) нормальні напруження σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)

РЕЗЮМЕ. Досліджено напружено-деформований стан тришарових циліндричних оболонок еліптичного і кругового перерізу з легким, армованим ребрами полімерним заповнювачем під дією нестационарного навантаження і впливом пружності зовнішнього середовища.

При аналізі динаміки елементів структур використано модель теорії оболонок і стрижнів С.П. Тимошенка. Проведено аналіз розрахунків впливу пружного середовища моделі Вінклера на напружено-деформований стан циліндричних оболонкових структур.

Розрахунки динаміки перехідних процесів тришарових циліндричних оболонок, розміщених в пружному середовищі, свідчать про можливість керування коливальними процесами в таких структурах.

Підбором матеріалів пакету таких оболонок, можна створити конструкцію структур з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні і відповідній пружності зовнішнього середовища.