

SECTION 10. MECHANICS

DOI: 10.46299/ISG.2024.MONO.TECH.2.10.1

10.1 Вплив пружного зовнішнього середовища на динамічну поведінку тришарових неоднорідних конічних оболонок при нестационарних навантаженнях

Високий рівень сучасного науково-технічного прогресу в машинобудуванні, будівництві, авіаційній і оборонній промисловості, атомній енергетиці та в інших галузях техніки став результатом використання в машинах, конструкціях і устаткуваннях композитних матеріалів і шаруватих оболонок різних форм.

Проте, не достатньо дослідженими залишаються задачі оцінки динамічної взаємодії однорідних та неоднорідних конічних оболонкових структур з пружними середовищами. Дослідженню взаємодії таких елементів конструкцій з пружними основами присвячена значна кількість публікацій [324-329]. В них в основному розглядаються тришарові оболонки на основі гіпотез Вінклера [332] – найбільш простої моделі пружного середовища, для опису якої достатньо лише одного коефіцієнта постелі (пружної основи). І в багатьох випадках такий підхід забезпечує позитивний розв’язок ряду важливих практичних задач. Зв’язок між реакцією пружного середовища $\tilde{R}(x,s,t)$ і радіальними переміщеннями точок серединної поверхні оболонки $u_3(x,s,t)$ у випадку моделі Вінклера має вигляд:

$$\tilde{R}(x,s,t) = C_1 u_3(x,s,t),$$

де C_1 – коефіцієнт постелі пружної основи, який характеризує роботу на розтяг - стиск; x, s – основа та колова координата серединної поверхні циліндричної оболонки і t – часова координата.

Більш близько до дійсності апроксимує вплив пружного середовища двопараметрична модель пружної основи [331], в якій зв’язок між реакцією пружного середовища і радіальними зміщеннями точок серединної поверхні шаруватої структури, зокрема циліндричної оболонки, має вигляд:

$$\tilde{R}(x, s, t) = C_1 u_3(x, s, t) + C_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \right),$$

де C_2 – коефіцієнт постілі, який характеризує роботу пружної основи на зсув.

Модель двох коефіцієнтів постілі, завдяки врахуванню опору зсуву, дає можливість врахувати розподільчу властивість основи.

Результати досліджень коливань тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем при нестационарних навантаженнях різного виду приведені в роботах [327, 330, 339, 344, 345]. Виведені рівняння коливань таких оболонок з відповідними граничними та початковими умовами, побудовані їх чисельні алгоритми на основі скінченно-елементної апроксимації рівнянь за просторовими та часовими координатами. Наведені чисельні результати розрахунків.

Останнім часом, однак, з'явилися нові вимоги до шаруватих конструкцій, пов'язані із властивостями сучасних матеріалів [336] та ін.

Необхідність одночасного врахування цілого ряду, часом суперечливих, вимог диктує ідею розробки багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або декілька функцій. При цьому окремі шари структури можуть відрізнятися як по товщині, так і за фізико-механічними властивостями, тобто шаруватий пакет може бути істотно неоднорідним. В даній роботі розглядаються тришарові конічні оболонки під впливом зовнішнього пружного середовища з врахуванням неоднорідності легкого заповнювача, армованого дискретно-симетричними ребрами, розташованими по лініях головних кривизн і з'єднуючих несучі шари, при роботі структури в умовах вимушених динамічних навантажень. При цьому розміри армуючих ребер є значно меншими ніж відстані між ними. Використання в заповнювачі матеріалів з низькими масовими характеристиками дозволяє, при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції, істотно підвищити її згинальну жорсткість і таким чином застосовувати теорію шаруватих оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів [333]. Це підвищує загальний порядок системи

розрахункових рівнянь, але дозволяє детальніше визначити динамічну поведінку тришарової структури при вимушених динамічних навантаженнях.

В основу рішення даної задачі покладена теорія оболонок і стрижнів, заснована на зсувній моделі С.П. Тимошенка, передбачаючій використання незалежних гіпотез для кожного окремого шару структури. Для виведення рівнянь коливань структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського. Чисельне моделювання динаміки досліджуваних оболонок і розрахунки виконуються скінченно-елементним методом.

§1. При виконанні поставлених задач використовується дискретно—симетрична неоднорідна по товщині пружна структура конічного типу (рис. 1),

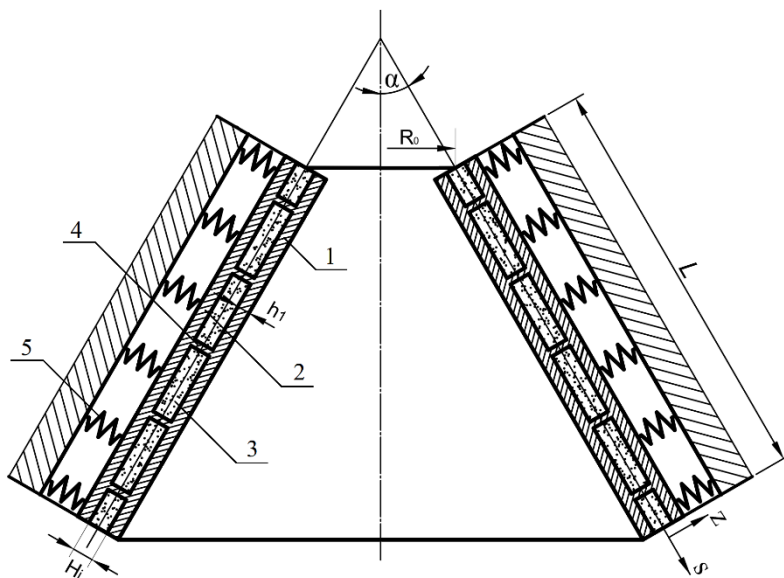


Рисунок 1. Конструкція тришарової конічної оболонки з полімерним заповнювачем
армованим ребрами жорсткості:

1 – внутрішній шар; 2 – зовнішній шар; 3 – полімерний заповнювач (t);
4 – армуючі ребра (j); 5 – пружне середовище Вінклера

яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких конічних оболонок (несучих шарів) з відповідними товщинами і радіусами. Серединні лінії оболонки паралельні, тобто мають загальний кут конусності α . Конструкція досліджуваної структури складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими шарами. Оболонка має постійну

загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат s, z . Координатна лінія s на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з твірною лінією; координатна лінія z ортогональна до серединної поверхні. Вважається, що її величина є позитивною, якщо розглядаєма точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні. При дослідженнях вісесесиметричних коливань структури використовується система координат s, t , причому координата s відраховується від вершини конуса, а у випадку зрізаної конічної оболонки, більш зручним є використання координати s , яка відраховується від краю оболонки з радіусом R_0 . В цьому випадку поточний радіус конічної оболонки визначається згідно формули: $R_s = R_0 + s \cdot \sin \alpha$, де α – кут конусності. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні конічної оболонки мають наступні значення: $A_1 = 1, A_2 = R_s, k_1 = 0, k_2 = \cos \alpha / R_s$. Так як шари оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем їх деформований стан може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \phi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \phi_1^2)^T$ [335]. Поля переміщень заповнювача в цьому випадку визначаються узагальненим вектором переміщення – $\bar{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \phi_1^t)^T$ згідно розрахунковій моделі, запропонованій в [340]. А деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж окружної координати, визначається узагальненим вектором переміщень $\bar{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \phi_1^j)^T$. На основі теорії деформації зсуву в оболонках [335], переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку s (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_i \phi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t), i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де ϕ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

При цьому деформаційні співвідношення несучих шарів і j -го ребра приймаються у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_0}{\partial s_1}; \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} u_0 + k_2 u_{03}; \\ \varepsilon_{13} &= \phi_1 + \frac{\partial u_{03}}{\partial s_1}; \kappa_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial s_1}; \kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \phi_1; \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}\end{aligned}\quad (1.2)$$

Виходячи з припущення жорсткого з'єднання армуючих ребер з несучими шарами оболонки, умови контакту центрів ваги ребер з несучих шарів мають вид

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(s_j); u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(s_j), k = 1, 2, \quad (1.3)$$

де s_j – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару;

$h_j^i = 0,5h_i + \frac{H_i}{2}$, $h_i (i = 1, 2)$ – товщини несущих шарів; $\frac{H_j}{2}$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача $h_t = H_j$.

Вирази для переміщень легкого заповнювача формуються згідно моделі, приведеної в роботі [338]:

$$\begin{cases} u_1^t(s, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) = u_{03}^t(s, t). \end{cases} \quad (1.4)$$

Кінематичні залежності для такого заповнювача прийняті на основі малих деформацій і мають наступний вид:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial s} + z \frac{\partial u_1^t}{\partial s}; \varepsilon_{22}^t = \frac{u_{03}^t}{R_{st} + z_t}; 2\varepsilon_{13}^t = \frac{\partial u_{03}^t}{\partial s} + u_1^t; \kappa_{11}^t = \frac{\partial u_1^t}{\partial s}. \quad (1.5)$$

Умови сумісності, елементів структури передбачають ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представлені в наступному вигляді [342]:

$$\begin{cases} u_0^t(z = z_t^1) = u_0^i + \frac{1}{2}(-1)^k h_i \varphi_1^i; \text{ Для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -\frac{h_t}{2}); \\ u_{03}^t = u_{03}^i; \text{ Для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = \frac{h_t}{2}). \end{cases} \quad (1.6)$$

Використовуючи вирази для поля переміщень несучих шарів (1.2), легкого заповнювача (1.4) і міжшарової неперервності переміщень (1.6), спрощені умови сумісності представляються як:

$$\begin{aligned} u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \\ u_1^t &= \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \quad u_{03}^t = \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рівняння руху для несучих шарів і легкого заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона - Остроградського, згідно з яким

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.8)$$

де Π – повна потенційна енергія пружної системи оболонка – навколишнє середовище, K – повна кінетична енергія пружної системи, A – робота зовнішніх сил, t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу.

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер, заповнювача з легкого матеріалу і пружного середовища.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_t \Pi^t + \delta \sum_{i=2} \Pi^f; \\ \delta K &= \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_t} K^t, \end{aligned} \quad (1.9)$$

де

$$\delta \Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i) dz_i \right] dS_i \quad (1.10)$$

$$\delta\Pi^t = \int_{S_t} \left[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} (T_{11}^t \delta\varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta\varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta\varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta\kappa_{11}^t) dz_t \right] dS_t \quad (1.11)$$

$$\delta\Pi^j = \int_{L_j} T_{22}^j \delta\varepsilon_{22}^j dL_j \quad (1.12)$$

$$\delta\Pi^f = \int_{S_2} [C_1 u_{03}^2 \delta u_{03}^2 + C_2 (\frac{\partial u_{03}^2}{\partial x}) \delta (\frac{\partial u_{03}^2}{\partial x})] dS_2 \quad (1.13)$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2} \partial u_0^i + \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \partial u_{03}^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \partial \varphi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i \quad (1.14)$$

$$\delta K^t = \int_{S_t} \left[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \partial u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \partial u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \partial u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_t \quad (1.15)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \partial u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \partial u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \partial \varphi_1^j \right) \right] dL_j \quad (1.16)$$

В рівняннях (1.10) - (1.16) величини; F^j , I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних перетинів армуючих ребер, ρ_j – питома вага матеріалу армуючого ребра; ρ_i ($i = 1, 2$) – питома вага матеріалу несучих шарів, а ρ_t – питома вага легкого заповнювача, C_1 , C_2 – коефіцієнти пружного середовища.

Вважається, що досліджувана структура навантажена внутрішнім вісесиметричним розподіленням нестационарним нормальним навантаженням $P_1(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

Слід зазначити, що при розрахунку потенційної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах $\delta\Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальний результат, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для даної оболонки не перевищує більш ніж 5%.

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень

несучих шарів, армуючих ребер заповнювача з легкого матеріалу і пружного середовища.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.8), з урахуванням співвідношень (1.9) - (1.16), отримаємо систему гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для тришарової симетричної конічної оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, яка розташована в пружному середовищі при осесиметричному імпульсному навантаженні і граничні умови:

$$\frac{1}{A_2^1} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2^1 T_{11}^1) - \frac{1}{A_2^1} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2^1 T_{22}^1) - \frac{1}{R_t} T_{13}^t = \left(\rho h + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{A_2^1} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2^1 M_{11}^1) - \frac{1}{A_2^1} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2^1 M_{22}^1) - T_{13}^1 - T_{13}^t = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2^1} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2^1 T_{13}^1) - k_2 T_{22}^1 + \frac{1}{R_t} T_{13}^t + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_{03}^1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_2^2 T_{11}^2) - \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_2^2 T_{22}^2) - \frac{1}{R_t} T_{13}^t = \left(\rho h + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_2^2 M_{11}^2) - \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_2^2 M_{22}^2) - T_{13}^2 - T_{13}^t = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_2^2 T_{13}^2) - k_2 T_{22}^2 + \frac{1}{R_t} T_{13}^t - C_1 u_3^2 + C_2 \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial x^2} = \rho h \frac{\partial^2 u_{03}^2}{\partial t^2},$$

$$\cos \alpha \frac{\partial T_{11}^t}{\partial S} + \frac{1}{R_{ts}} (T_{11}^t - T_{13}^t) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}$$

$$\cos \alpha \frac{\partial M_{13}^t}{\partial S} - T_{13}^t + \frac{1}{R_{ts}} M_{13} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2};$$

$$\cos \alpha \frac{\partial T_{13}^t}{\partial S} - \frac{1}{R_{ts}} T_{11}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2};$$

$$[T_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}^1}{\partial t^2}, [T_{13}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}^1}{\partial t^2}, [M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}, i=1,2; j=\overline{1,J}.$$

Це дві системи рівнянь дев'ятого порядку. На лініях розривів в рівняннях коливань (1.17) $[T_{11}^{i\pm}]_j$; $[T_{13}^{i\pm}]_j$; $[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}]_j$ – відповідають зусиллям–моментам, які діють на j–й дискретний елемент з боку несучих шарів. В шостому рівнянні системи (1.17) доданки $-C_1 u_3^2 + C_2$ означають дію пружної основи Пастернака на зовнішню несучу оболонку тришарової конічної оболонки.

Співвідношення між величинами зусиль–моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер мають вигляд:

$$T_{11}^i = B_{11}^i(\varepsilon_{11}^i + \nu_2^i \varepsilon_{22}^i) \quad ; \quad T_{22}^i = B_{22}^i(\varepsilon_{22}^i + \nu_1^i \varepsilon_{11}^i) \quad ; \quad T_{13}^i = k^2 G_{13}^i \varepsilon_{13}^i \quad ;$$

$$M_{11}^i = D_{11}^i \kappa_{11}^i; \quad M_{22}^i = D_{22}^i \kappa_{22}^i; \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j},$$

E_i, G_{13}^i, ν_i – фізико-механічні параметри матеріалу несучих шарів;

k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву теорії оболонок С.П. Тимошенка; E_j, F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перетину j -го ребра відповідно.

Зусилля і моменти для легкого заповнювача мають вигляд:

$$T_{11}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{13}^t dz_t. \quad (1.18)$$

При розрахунках конкретних задач рівняння коливань (1.17) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

§2. Чисельне рішення задач.

Розгляється задача динамічного деформування тришарової конічної оболонки на пружній основі Вінклера з наступними граничними умовами і їх комбінаціями:

жорстко защемлені торці при $x=x_0, x=x_N$ для несучих оболонок мають вигляд:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0, \quad (i=1,2); \quad (2.1)$$

вільні торці при $x=x_0, x=x_N$ для несучих оболонок мають вигляд:

$$T_{11}^i = 0; \quad T_{13}^i = 0; \quad M_{11}^i = 0; \quad (i=1,2); \quad (2.2)$$

граничні умови для шарнірного кріплення:

$$u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0. \quad (i=1,2); \quad (2.3)$$

Початкові умови для всіх випадків закріплення несучих оболонок при

$t = 0$ є нульовими:

$$u_1^i = u_3^i = \phi_1^i = 0, \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1^i}{\partial t} = 0; \quad (i=1, 2). \quad (2.4)$$

Нестационарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді

$$P_1 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)] \quad (2.5)$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В розрахунках покладається: $A=10^6$ Па; $T=50 \cdot 10^{-6}$ с, а геометричні та фізико–механічні параметри мають наступні значення:

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3; \quad R_0 = 0,205 \text{ м};$$

$$h_1/R_0 = 0,01; \quad L=0,39; \quad h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; \quad H_j = 2 h_1; \quad F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad \text{кут конусності } \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$C_1=10^8 \text{ Н/м}^3 \text{ і } C_1=10^9 \text{ Н/м}^3; \quad C_2=0.$$

Досліджуються варіанти структури коли легкий заповнювач відсутній, та при його наявності з наступними властивостями $E_{1,2}/E_t = 50$ $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$, $\nu_t = 0,33$.

Дискретні підкріплюючі елементи розташовуються в точках:

$$s_j = [6 + (k - 1)16]\Delta s, \quad k = \overline{1,5}, \quad \Delta s = (s_N - s_0)/80, \quad (s_N - s_0) = 0,4 \text{ м}.$$

Відповідна початково-крайова задача (1.17), (2.1) - (2.5) вирішується з допомогою скінченно-елементного методу. Створена для цього скінченно-елементна модель оболонки, відображає взаємозв'язок потенційної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил:

$$\Pi = E - W, \quad (2.6)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.8) приймає вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)} \quad (2.7)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.8)$$

відповідають співвідношенням:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (2.9)$$

Досліджується динаміка напружено-деформованого стану симетричної тришарової конічної оболонки. У моделях використовується тривимірний об'ємний скінченний елемент [334].

Створена скінченно-елементна модель конічної структури (рис. 2) включає наступні складові: а – зовнішня несуча оболонка; б – внутрішня несуча оболонка; с – легкий заповнювач; d – армуючі ребра. При довжині твірної 0,39 м і куту конусності 30° модель налічує 33696 об'ємних скінченних елементів і 5688 елементів пружної основи. Загальна кількість вузлів становить 45504.

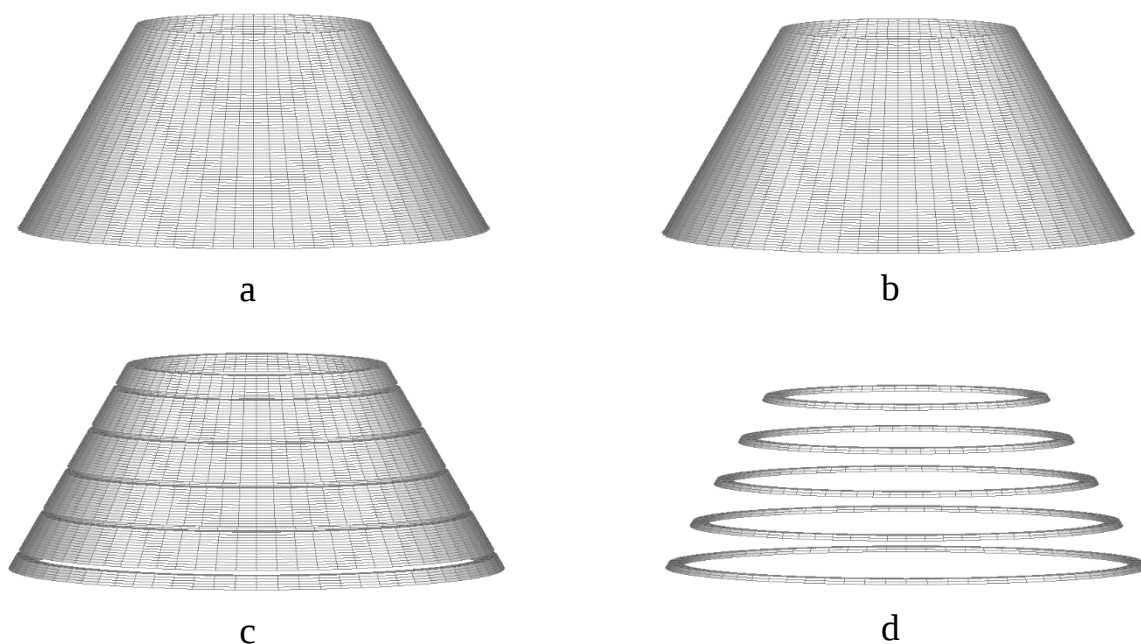


Рисунок 2. Скінченно-елементна модель тришарової конічної оболонки:

а – внутрішній шар; б – зовнішній шар; с – полімерний заповнювач (t);

d – армуючі ребра (j)

Розрахунки виконувались у програмно-розрахунковому комплексі *Nastran* алгоритмом прямого перехідного динамічного процесу. При цьому

реакція конструкції розраховувалась шляхом розв'язання систем рівнянь з використанням чисельного інтегрування.

Отримані таким чином чисельні результати дозволяють аналізувати напружено–деформований стан тришарової пружної структури даного кінцевого типу в будь який момент у часовому інтервалі $0 \leq t \leq 10T$.

На рис. 3а приведені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів тришарової кінцевої оболонки під дією зовнішнього пружного середовища $C_1 = 10^8 \text{ Н/м}^3$ вздовж координати s (суцільні лінії). Торці оболонки жорстко защемлені. Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої несучої оболонки, а крива 2 – величині u_3^2 зовнішньої несучої оболонки в момент часу $t = 2,35 T$ і $t = 2,3 T$ (час досягнення максимального значення величин u_3^1 (1) і u_3^2 (2)). Пунктирні лінії на графіках відповідають пружному середовищу $C_1 = 10^9 \text{ Н/м}^3$. Легкий заповнювач в даному варіанті структури відсутній. На даному і всіх подальших рисунках точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують s .

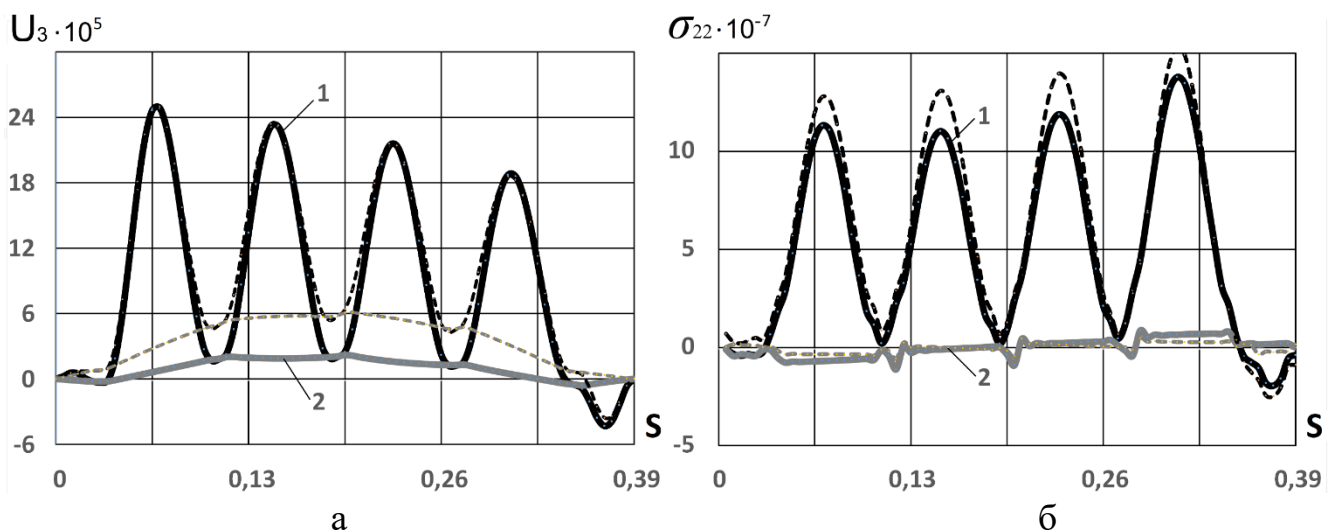


Рисунок 3. Максимальні нормальні прогини і напруження несучих шарів тришарової кінцевої оболонки без полімерного заповнювача і жорсткому защемленні торців

місця розташування дискретних ребер. Даний графічний матеріал показує значну несиметричність розподілу величин u_3^1 (1) і u_3^2 (2) за просторовою координатою

На рис. 3б зображені залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від

координати s . Крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої несучої оболонки, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішньої несучої оболонки в момент часу $t = 2,35 T$ ($t = 2,3 T$ пунктирна лінія), (t -час досягнення максимального значення величин σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)).

На рис. 4а зображені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів досліджуваної конічної оболонки під дією зовнішнього пружного середовища від позовжньої координати s . Торці оболонки жорстко зацмлені. Полімерний заповнювач - $E_1^1/E_1^t = 50$.

На рис. 4б приведені залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів досліджуваної структури вздовж координати s в моменти часу $t = 4,7T$ (4,2T- пунктирна лінія).

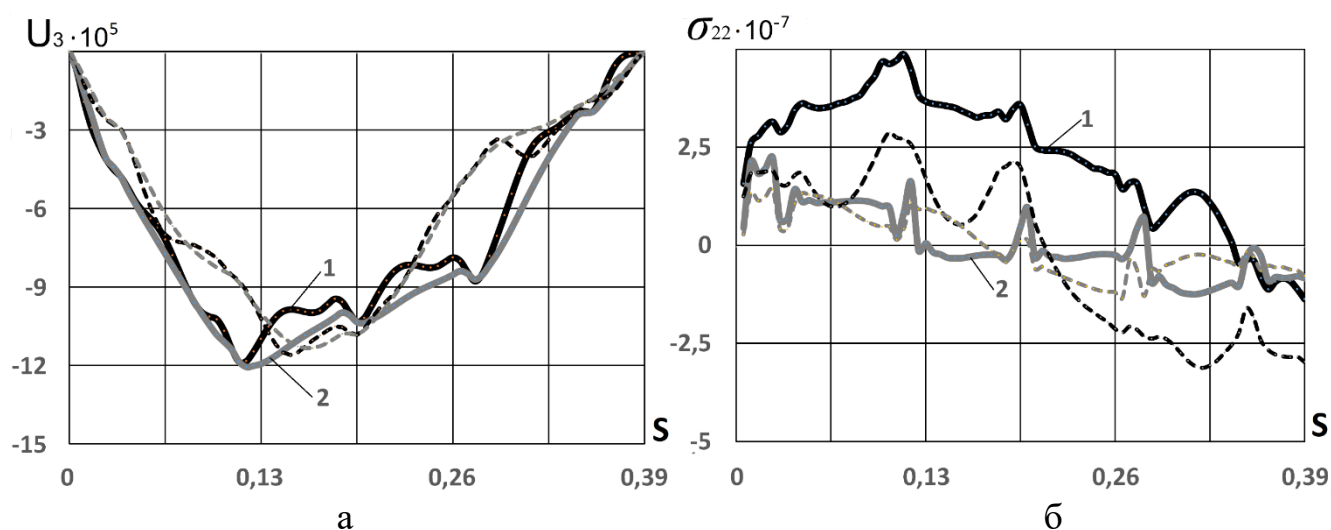


Рисунок 4. Максимальні нормальні прогини і напруження несучих шарів тришарової конічної оболонки при наявності полімерного заповнювача і жорсткому зацмленні торців

На рис. 5а приведені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів досліджуваної структури при аналогічних параметрах її навантаження. Торці оболонки шарнірно закріплені. Структура без заповнювача ($t = 2,6T$).

На рис. 5б зображені залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від координати s в момент часу $t = 2,6T$ ($t = 2,4T$ пунктирна лінія).

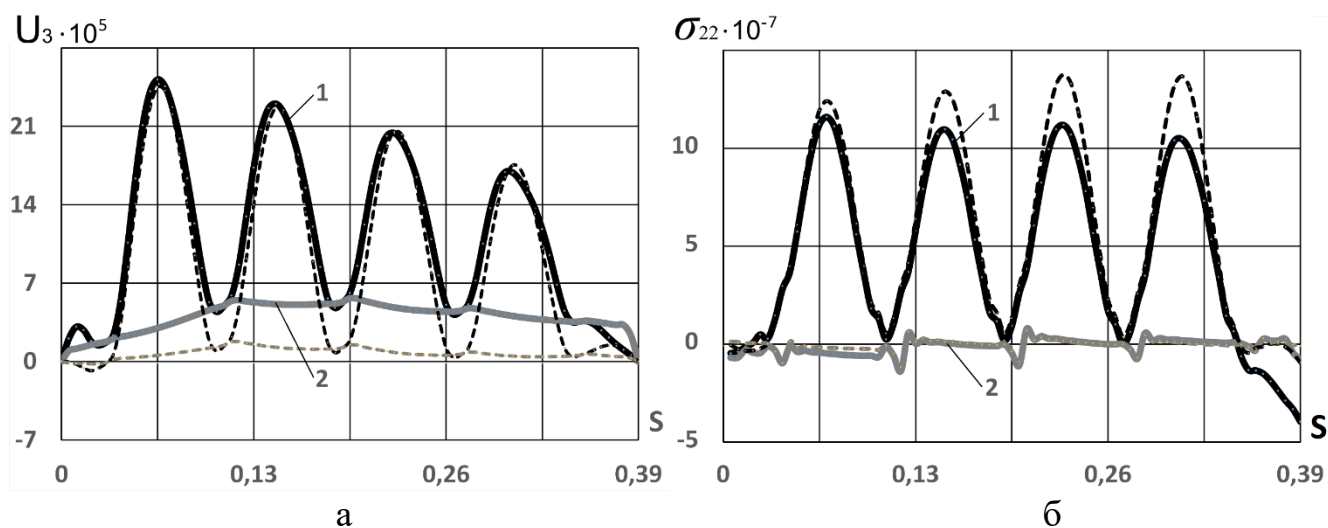


Рисунок 5. Максимальні нормальні прогини і напруження несучих шарів тришарової конічної оболонки без полімерного заповнювача і шарнірному закріпленні торців

На рис. 6а приведені залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок даної тришарової конічної структури під дією зовнішнього пружного середовища вздовж координати s . Торці оболонки шарнірно закріплені, а її заповнювач має

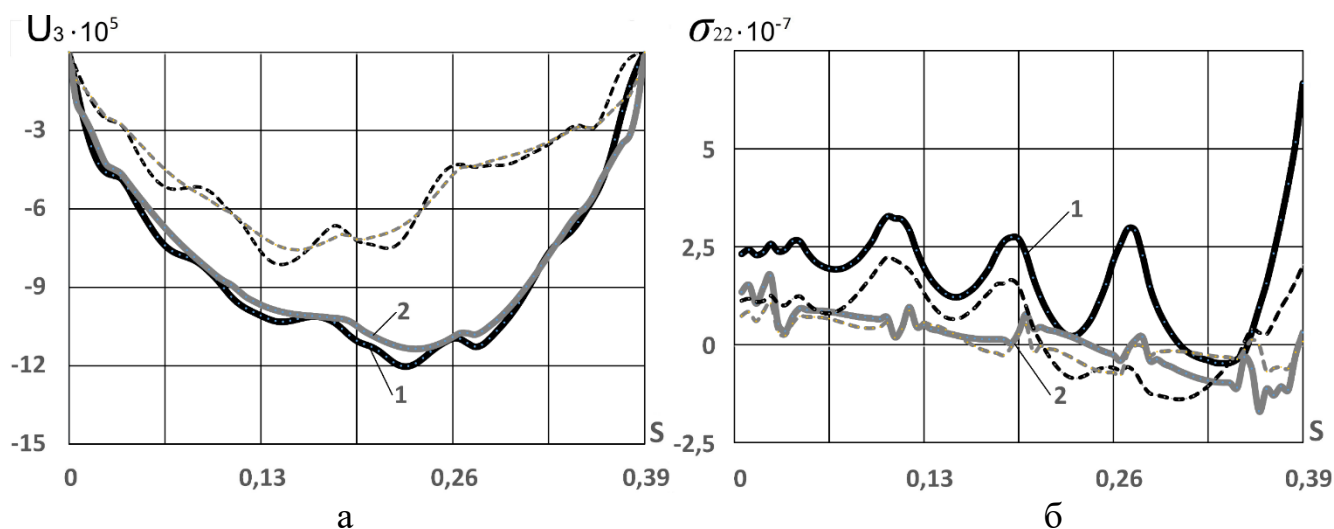


Рисунок 6. Максимальні нормальні прогини і напруження несучих шарів тришарової конічної оболонки при наявності полімерного заповнювача і шарнірному зашкрепленні торців

властивості $E_1^1/E_1^t = 50$ ($t = 5,0T$ ($t = 3,95T$ - пунктирна лінія)).

На рис 6б приведені залежності нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від координати s в момент часу $t = 5,0T$ ($t = 3,95T$ - пунктирна лінія).

РЕЗЮМЕ. Досліджено динаміку тришарових конічних оболонок при нестационарному навантаженні під впливом пружного зовнішнього середовища. Отримано рівняння руху тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні. При аналізі елементів пружної структури використана модель теорії оболонок і стрижнів Тимошенка за незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. Виведено рівняння руху тришарової конічної оболонки з дискретно-неоднорідним заповнювачем згідно з варіаційним принципом Гамільтона-Остроградського. Чисельні результати характеру коливань тришарової пружної конструкції отримані методом скінченних елементів. Отримані результати впливу фізико-механічних параметрів несучих шарів оболонки і пружності зовнішнього середовища на напружено-деформований стан структури при осесиметричному внутрішньому імпульсному навантаженні. В різній мірі, але практично аналогічно це підтверджують і результати інших робіт [341, 343-349].