

9.2 Дослідження напружено-деформованого стану пружних оболонкових конструкцій за допомогою варіаційного RVR-методу

До теперішнього часу побудована велика кількість різноманітних варіантів прикладних теорій оболонок, тією чи іншою мірою уточнюючих класичну теорію, засновану на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Достаток нерідко суперечних один одному варіантів прикладних теорій створює певні утруднення у виборі уточненої теорії, яка при цьому не містить регулярного процесу уточнення й має обмежену область свого практичного застосування. Використання сучасних матеріалів в оболонкових конструкціях приводять до необхідності розвитку механіки пружних оболонок та побудови їх уточнених моделей. З накопиченого у науковій літературі матеріалу досліджень міцності і жорсткості пружних оболонок різної гаусової кривини, розробка в рамках уточнених теорій ефективних методів для визначення тривимірного напружено-деформованого стану (НДС) багатозв'язних оболонок довільної товщини належить до актуальної проблеми, вирішення якої у просторовій постановці пов'язано зі значними математичними й обчислювальними труднощами.

В монографії [307] розроблено новий науково обґрунтований й універсальний, надійний і алгоритмічно простий, ефективний при реалізації чисельно-аналітичний метод (далі – варіаційний RVR-метод) розрахунку тривимірного НДС статично навантажених однорідних і неперервно неоднорідних по товщині нетонких анізотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм. Пропонований RVR-метод ґрунтується на варіаційному принципі Рейсснера [308] (для підвищення точності розв'язання задач), методі І.М. Векуа [309] (для зведення розв'язку тривимірної задачі регулярною послідовністю розв'язків двовимірних задач), теорії R-функцій [310] (для точного врахування на аналітичному рівні геометричної інформації досліджуваних оболонок і створення аналітичних структур розв'язків, що точно задовольняють крайові умови на поверхнях оболонок) та на залученні повної системи загальних рівнянь тривимірної математичної теорії пружності.

Надалі під оболонкою маємо на увазі тіло, яке займає деяку область Ω і обмежено лицьовими криволінійними поверхнями $\Gamma^{\pm}$ (при $z = \pm h/2$), відстань між ними визначає сталу товщину h оболонки (рис. 1), на величину якої не накладаються обмеження. Поверхня, яка рівновіддалена від лицьових поверхонь, називається серединною поверхнею Ω_s , в якій розташуємо ортогональну криволінійну систему координат $\{\alpha_1, \alpha_2, z\}$ з ортами $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$. Координатні лінії α_1 і α_2 спрямовані, як і пружно-еквівалентні напрямки ортотропії матеріалу, уздовж ліній головних кривин оболонки, а координатна лінія z перпендикулярна серединної поверхні Ω_s ($z=0$). Пружна оболонка є замкненою, коли вона не має інших границь, крім поверхонь $\Gamma^{\pm}$. Якщо оболонка має край, припускаємо, що її бічна поверхня утворюється переміщенням перпендикуляра до Ω_s уздовж обмежуючого цю поверхню контуру Γ_s .

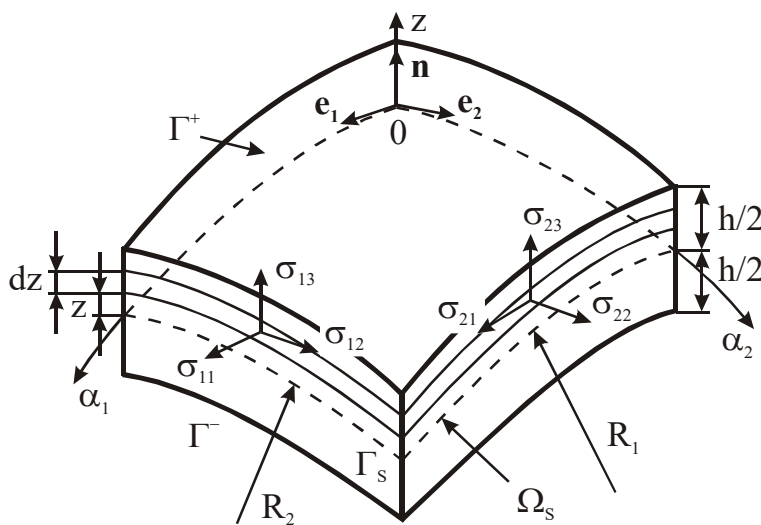


Рисунок 1. Елемент пружної оболонки

Основною задачею теорії оболонок є визначення і аналіз напружено-деформованого стану, що виникає в оболонці при заданих зовнішніх навантаженнях і умовах закріплення країв. Уважаємо, що напруження в оболонці не перевищують межі пружності ортотропного матеріалу, а діюче на оболонку статичне навантаження таке, що можна скористатися геометрично лінійною теорією оболонок. Існують різні підходи до визначення границь застосовності

лінійної теорії оболонок, наприклад, можна виходити з відношення величин вектора переміщення $\mathbf{u}_s$ точок серединної поверхні оболонки до її товщини і уважати, що лінійна теорія застосовна, якщо $|\mathbf{u}_s|/h \leq 1/5$. У практичних розрахунках прийнято розрізняти по геометричних параметрах тонкі оболонки, для яких відношення $h/R_0 \leq 1/20$; середньої товщини – $1/20 < h/R_0 \leq 1/5$; товстостінні – $h/R_0 > 1/5$ (R_0 – мінімальний радіус кривини серединної поверхні). Однак оцінки області застосовності тієї або іншої теорії пружних оболонок носять досить умовний характер і дають лише перший орієнтир при виборі варіанта теорії оболонок для розв'язку конкретної задачі.

При розробці варіаційного RVR-методу створено нові аналітичні структури розв'язків задач статички пружних оболонок, які точно задовольняють усі граничні умови для просторових крайових задач механіки деформованого твердого тіла. Наведемо суттєві математичні аспекти побудови названих структур розв'язків для крайових задач статички ортотропних оболонок. Для цього розглянемо тривимірний елемент оболонки (рис. 2), обмежений поверхнями $\Gamma^\pm$ і бічною поверхнею Γ_s , яка перетинає серединну поверхню Ω_s уздовж граничної лінії G , що характеризується нормаллю $\mathbf{v}$ і дотичною $\boldsymbol{\tau}$.

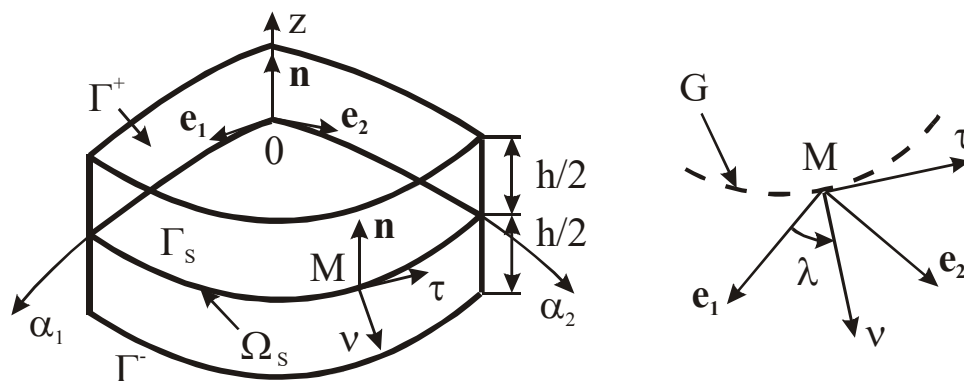


Рисунок 2. Елемент пружної оболонки

Нехай λ – кут між координатною лінією α_1 і нормаллю $\mathbf{v}$ до кривої G , тоді згідно рис. 2.

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \cos \lambda + \mathbf{e}_2 \sin \lambda; \quad \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{e}_1 \sin \lambda + \mathbf{e}_2 \cos \lambda. \quad (1)$$

Вектор переміщення $\mathbf{u}$ представимо у вигляді:

$$\mathbf{u} = u_v \mathbf{v} + u_\tau \boldsymbol{\tau} + u_3 \mathbf{n}. \quad (2)$$

Справедливі співвідношення:

$$u_v = u_1 \cos \lambda + u_2 \sin \lambda; \quad u_\tau = -u_1 \sin \lambda + u_2 \cos \lambda. \quad (3)$$

Формули, що визначають компоненти тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$ в точках довільної кривої G оболонки з нормаллю $\mathbf{v}$ (рис. 2), мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{vv} &= \sigma_{11} \cos^2 \lambda + \sigma_{12} \sin 2\lambda + \sigma_{22} \sin^2 \lambda; \\ \sigma_{v\tau} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \lambda \cos \lambda + \sigma_{12} \cos 2\lambda; \\ \sigma_{vn} &= \sigma_{13} \cos \lambda + \sigma_{23} \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

У розрахунковій інженерній практиці при розв'язанні різної складності крайових задач теорії пружності все більша увага приділяється змішаним варіаційним постановкам, що будуються на основі функціонала Рейсснера I_R при незалежній апроксимації вектора переміщення $\mathbf{u}$ й тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$. Функціонал Рейсснера I_R напишемо в такий спосіб:

$$I_R = \int_{\Omega} [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W(\sigma_{ij}) - u_i F_i] d\Omega - \int_{\Gamma_u} (u_i - u_i^*) \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} t_i u_i d\Gamma, \quad (5)$$

де питома додаткова робота деформації $W(\sigma_{ij})$ для лінійно-пружного тіла дорівнює за величиною пружному потенціалу і, зокрема, для ортотропного тіла може бути представлена в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} W(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - 2\nu_{21} \sigma_{22}) \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} (\sigma_{22} - 2\nu_{32} \sigma_{33}) \sigma_{22} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_3} (\sigma_{33} - 2\nu_{13} \sigma_{11}) \sigma_{33} + \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}^2 + \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}^2 + \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Справедливі також наступні рівності

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} &= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23}); \\ d\Omega &= A_1 A_2 \chi_1 \chi_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

У функціоналі Рейсснера $\mathbf{I}_R$ (5) варіюються незалежно друг від друга компоненти u_i вектора переміщення $\mathbf{u}$ і компоненти σ_{ij} тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$, тому стаціонарному значенню $\mathbf{I}_R$ відповідають дійсні поля переміщень і напружень, а в точці стаціонарності (сідлової точці) функціонал $\mathbf{I}_R$ має $\min_u \max_\sigma$. Варіаційний принцип Рейсснера, сформульований для функціонала $\mathbf{I}_R$, полягає в тому, що варіаційне рівняння Рейсснера

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{I}_R &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - a_{ijkl} \sigma_{kl} \right] \delta \sigma_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) \delta u_i \right\} d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Gamma_u} (u_i - u_i^*) n_j \delta \sigma_{ij} d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

еквівалентно співвідношенням напруження-деформації, рівнянням рівноваги, геометричним і статичним крайовим умовам досліджуваної задачі.

Виражаючи в $\mathbf{I}_R$ (5) згідно зі співвідношеннями Коши компоненти ε_{ij} тензора деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$ через компоненти u_i вектора переміщення $\mathbf{u}$, в роботі [307] представлені аналітичні вирази варіаційного рівняння Рейсснера $\delta \mathbf{I}_R = 0$ в ортогональній криволінійній системі координат $\{\alpha_1, \alpha_2, z\}$ для тривимірних крайових задач статичної ортотропної оболонки довільної гаусової кривини. Зауважимо, що математичний висновок відповідного рівняння $\delta \mathbf{I}_R = 0$ для тонкої оболонки з урахуванням поперечного зсуву та обтіснення виконаний П. Нагді в його роботі [311], яка, на жаль, не вільна від помилок і непослідовна у виборі закону розподілу переміщень по товщині пружної оболонки.

Як відомо, граничні умови в крайових задачах теорії пружності можуть бути задані в напруженнях, переміщеннях і в змішаному вигляді. Наприклад, на контурі $\alpha_i = \text{const}$ граничні умови в напруженнях сформулюються (при $i \neq j = 1, 2$) через величини σ_{i1} , σ_{ij} і σ_{i3} , а в переміщеннях – через u_1 , u_2 і u_3 .

Щоб задані напруження і переміщення не суперечили варіаційному рівнянню Рейсснера, граничні умови повинні сформулюватися у вигляді комбінацій згідно енергетичним [312] парам на лицьових поверхнях $\Gamma^\pm$ (при $z = \pm h/2$):

$$\sigma_{i3} = t_i^\pm \vee u_i = u_i^\pm \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (9)$$

а також на бічній поверхні Γ_s :

$$\sigma_{vv} = \sigma_{vv}^{(s)} \vee u_v = u_v^{(s)}; \quad \sigma_{v\tau} = \sigma_{v\tau}^{(s)} \vee u_\tau = u_\tau^{(s)}; \quad \sigma_{vn} = \sigma_{vn}^{(s)} \vee u_3 = u_3^{(s)}. \quad (10)$$

Розглянемо деякі найпоширеніші однорідні граничні умови на поверхні Γ_s з нормаллю $\mathbf{v}$ (рис. 2):

а) вільний край:

$$\sigma_{vv} = 0; \quad \sigma_{v\tau} = 0; \quad \sigma_{vn} = 0, \quad (11)$$

б) вільно опертий край:

$$\sigma_{vv} = 0; \quad \sigma_{v\tau} = 0; \quad u_3 = 0, \quad (12)$$

в) край з абсолютно жорсткою у своїй поверхні діафрагмою:

$$\sigma_{vv} = 0; \quad u_\tau = 0; \quad u_3 = 0, \quad (13)$$

г) ковзне защемлення краю:

$$u_v = 0; \quad \sigma_{v\tau} = 0; \quad \sigma_{vn} = 0, \quad (14)$$

д) абсолютно защемлений край (жорстке защемлення):

$$u_v = 0; \quad u_\tau = 0; \quad u_3 = 0. \quad (15)$$

Граничні умови можуть бути неоднорідними при заданих на краю значеннях статичних і кінематичних величин. Якщо оболонка є повністю замкненою (не має граничного контуру) або частково замкненою (границя проходить у напрямку однієї координати), то граничні умови (11) ÷ (15) уздовж замкнених координатних осей замінюються умовами періодичності, які забезпечують однозначність шуканих величин у кожній точці.

Як відомо, в математичній фізиці [313] ставлять і розв'язують відносно рівняння Лапласа три основні крайові задачі: Діріхле, Неймана і змішана (Ньютона згідно [314]) або, як їх іноді називають, перша, друга і третя крайова задачі. Формулювання цих задач різняться лише супутніми рівнянню Лапласа

крайовими умовами, які містять шукану функцію (задача Діріхле) - крайові умови I роду, або її похідні (задача Неймана) - крайові умови II роду, або функцію та її похідні (змішана задача) - крайові умови III роду.

Маючи на увазі вищезгадану класифікацію, слід зазначити, що одним з переконливих доводів на користь застосування змішаного варіаційного принципу Рейсснера є те, що практично всі варіанти з існуючого в теорії оболонок різноманіття формулювань крайових умов (в тому числі які є для функціоналів Лагранжа і Кастільяно крайовими умовами II та III роду) стають при використанні функціоналу Рейсснера крайовими умовами I роду в силу незалежності вектора $\mathbf{u}$ і тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Зазначена обставина істотно спрощує побудову структур розв'язань досліджуваних крайових задач.

Незважаючи на те, що геометричні і статичні граничні умови є природними для функціонала Рейсснера, для поліпшення збіжності обчислювального процесу координатні функції доцільно підкорити всім граничним умовам. У такому випадку відповідно сформульованої і доведеної автором роботи [315] *теоремі про достатню ознаку збіжності методу Рітца для функціонала Рейсснера*, по-перше, послідовності Рітца для неекстремального функціонала Рейсснера I_R сходиться по енергії оператора задачі до точного розв'язку; по-друге, полегшується пошук наближеного розв'язку, оскільки необхідну точність при порівнянні збіжності можна одержати при меншому числі координатних функцій, а це знижує накопичення погрешностей і обчислювальні витрати; по-третє, у випадку точного задоволення структур розв'язків усім крайовим умовам поверхневі інтеграли у варіаційному рівнянні Рейсснера зникнуть, що приводить до спрощення системи рівнянь Рітца, симетрична матриця якої вже має стрічкову структуру із шириною стрічки, залежної від індексації шуканих функцій.

Один із можливих шляхів оцінки прийнятності уточнених теорій оболонок полягає в зіставленні отриманих на їхній основі розв'язань із результатами розв'язання тривимірних задач. Результати такого зіставлення, природно, не дають остаточної відповіді на питання про придатність обраної наближеної

теорії у всіх випадках, однак проведення таких зіставлень у широкому діапазоні зміни параметрів дає можливість із більшим ступенем упевненості й обґрунтованості вказати ті значення параметрів, при яких виконуються прийняті припущення. Загальна ідея побудови прикладної теорії оболонок полягає в апроксимації шуканих компонентів переміщень u_i і напружень σ_{ij} кінцевими рядами вигляду (при $i = 1, 2$; $j = \overline{1, 3}$):

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum_{k=0}^{l_i-1} u_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z); & u_3 &= \sum_{k=0}^{l_3-1} u_{3k}(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z); \\ \chi_{3-i} \sigma_{ij} &= \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \sigma_{ij}^k(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z); & \chi_1 \chi_2 \sigma_{33} &= \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sigma_{33}^k(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

де $P_k(z)$ – апроксимуючі функції, у якості яких в основному застосовуються ступені координати z , поліноми Лежандра й тригонометричні функції; $\chi_i = 1 + z/R_i$; R_i – головні радіуси кривини (при $i = 1, 2$) поверхні Ω_s .

Умова стаціонарності змішаного функціонала Рейсснера I_R для розрахункової пружної області Ω оболонки, а також структури розв'язань, які точно задовольняють всім геометричним і статичним крайовим умовам тривимірної задачі, можуть мати вигляд, представлений у роботі [307], де науково обґрунтована доцільність здійснення пошуку точки стаціонарності функціонала I_R на класі напружень і переміщень, що задовольняють крайовим умовам. При цьому уведені в (16) числа l_i, l_{ij} апроксимацій компонент переміщень u_i і напружень σ_{ij} по товщині оболонки визначають її зсувну модель, вибір якої відповідає комбінації величин $(l_1, l_3, l_{11}, l_{13}, l_{33})$ при $i = 1, 2$.

Вирішення проблеми вірогідності результатів розв'язання задач прямими методами залежить від ефективності контролю збіжності. У роботі [316] запропонована заснована на теорії подвійності опуклого аналізу апостеріорна інтегральна оцінка точності чисельних розв'язків, одержуваних при відшукуванні точки стаціонарності неекстремального функціонала Рейсснера I_R . Можна показати, що існує і є єдиною для лагранжіана $L(u, \sigma)$ сідлова точка $(\bar{u}, \bar{\sigma})$,

компоненти якої будуть розв'язками основної варіаційної задачі для функціонала Лагранжа I_L й двоїстої – для функціонала Кастильяно I_C . Справедлива доведена в роботі [316] рівність:

$$I_L(\bar{\mathbf{u}}) = I_R(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = I_C(\bar{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (17)$$

Згідно з (17) задача мінімізації функціонала I_L та двоїста їй задача максимізації функціонала I_C еквівалентні задачі визначення сідлової точки функціонала I_R . Цей висновок покладений в основу апостеріорної оцінки [316] наближених розв'язків для компонентів $\mathbf{u}$ і $\boldsymbol{\sigma}$. У результаті порівняння величин трьох функціоналів можна побудувати алгоритм регулярного уточнення розв'язків за рахунок послідовного вибору кількості апроксимацій шуканих функцій поки рівність (17) не буде виконана з наперед заданою точністю.

Для дослідження збіжності числено-аналітичного RVR-методу бажано найбільш повно охопити всі наявні для цього можливості, оскільки оцінка точності обчислення функціоналів не гарантує тієї самої точності для шуканих переміщень і напружень, одержуваних з наближених розв'язків. Зокрема, безсумнівний інтерес представляє перевірка виконання фізичних співвідношень пружності, які при розв'язанні варіаційної задачі задовольняються приблизно через те, що для функціонала Рейсснера ці співвідношення є природними диференціальними рівняннями Ейлера вигляду:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} \right) - a_{ijkl} \sigma_{kl} = 0, \quad (18)$$

де a_{ijkl} – компоненти тензора піддатливості $\mathbf{a}$ матеріалу оболонки.

За допомогою ефективного варіаційного RVR-методу розглянемо декілька прикладів чисельної реалізації пропонованого методу.

Приклад 1. Розглянемо циліндр товщини h ($-h/2 \leq z \leq h/2$) і довжини $2a$ (при $-a \leq \alpha_1 \leq a$). Ізотропний нетонкий циліндр має вільні торці та зовнішню поверхню ($r = R + h/2$), а на ділянці $-b \leq \alpha_1 \leq b$ внутрішньої поверхні

($r = R - h/2$) діє рівномірний тиск p_1 . Розрахунок виконаний при наступних даних: $E = 210$ ГПа; $\nu = 0,3$; $a = 0,5$ м; $h = 0,06$ м; $R = 0,6$ м; $p_1 = 1$ МПа.

Залежно від обраної зсувної моделі у таблиці 1 представлені результати обчислень у перетині $\alpha_1 = 0$ переміщень u_3^- , u_3^0 , u_3^+ (аналогічно напружень) відповідно при $z = -h/2$, $z = 0$, $z = h/2$.

Таблиця 1.

Значення шуканих величин у залежності
від товщини циліндра та обраної зсувної моделі оболонки

h/R	$(l_1, l_3, l_{ii}, l_{i3}, l_{33})$	$u_3^-, \text{ мкм}$	$u_3^0, \text{ мкм}$	$u_3^+, \text{ мкм}$	$\sigma_{22}^-, \text{ МПа}$	$\sigma_{22}^0, \text{ МПа}$	$\sigma_{22}^+, \text{ МПа}$	$\sigma_{33}^0, \text{ МПа}$
$\frac{1}{5}$	(2,1,2,1,0)	12,55	12,55	12,55	3,813	4,238	4,664	-0,450
	(2,2,2,2,1)	13,05	12,56	12,06	4,012	4,249	4,486	-0,442
	(2,3,2,3,2)	13,01	12,56	12,03	4,003	4,245	4,487	-0,442
	(3,1,3,1,0)	12,55	12,55	12,55	3,783	4,252	4,637	-0,450
	(4,2,4,2,1)	13,05	12,57	12,07	4,036	4,237	4,510	-0,450
	(4,3,4,3,2)	13,02	12,57	12,04	4,018	4,240	4,506	-0,450
	(7,7,7,7,7)	13,02	12,57	12,04	4,014	4,240	4,504	-0,450
1	(2,1,2,1,0)	1,046	1,046	1,046	0,287	0,289	0,290	-0,250
	(2,2,2,2,1)	1,458	0,989	0,520	0,497	0,314	0,131	-0,179
	(2,3,2,3,2)	1,654	0,891	0,705	0,495	0,312	0,129	-0,183
	(3,1,3,1,0)	1,045	1,045	1,045	0,286	0,289	0,290	-0,250
	(4,2,4,2,1)	1,483	0,986	0,489	0,574	0,286	0,145	-0,204
	(4,3,4,3,2)	1,684	0,891	0,703	0,700	0,248	0,202	-0,203
	(9,9,9,9,9)	1,744	0,894	0,655	0,776	0,252	0,200	-0,207

Наведені в таблиці чисельні результати отримані на основі застосування зсувних моделей, що відповідають відомим у науковій літературі уточненим теоріям оболонок. Так, варіантам (3,1,3,1,0) і (4,2,4,2,1) відповідають теорія пологих оболонок і прикладна теорія оболонок В.В. Пікуля [317]; (2,1,2,1,0) і (4,3,4,3,2) - теорія типу Тимошенка й прикладна теорія [318]; (2,2,2,2,1)

відповідає уточнена модель анізотропних оболонок [319], а (2,3,2,3,2) - теорія типу Рейсснера-Нагді [311]. Розподіл у перетині $\alpha_1 = 0$ переміщення u_3 й напруження σ_{33} по товщині ($|\zeta| = 2|z|/h \leq 1$) показано на рис. 3 (цифри на графіках відповідають числам апроксимацій l_i при $l_{ij} = l_i$). Трикутниками позначені результати, до яких асимптотично збігаються наближені розв'язання, а кружками - результати, обчислені згідно відомим для задачі Ламе аналітичним розв'язанням, застосування яких для циліндра, навантаженого тиском не по всій бічній поверхні, може привести до невірних результатів.

Всі використовувані теорії дають практично однакові результати для оболонки тонкої ($h/R < 1/5$). З аналізу результатів таблиці 1 випливає, що для оболонки середньої товщини переважніше використовувати теорію [319] – зсувну модель (2,2,2,2,1), яка у порівнянні з (2,1,2,1,0) і (3,1,3,1,0) дає кращі результати у всьому діапазоні зміни товщини оболонки.

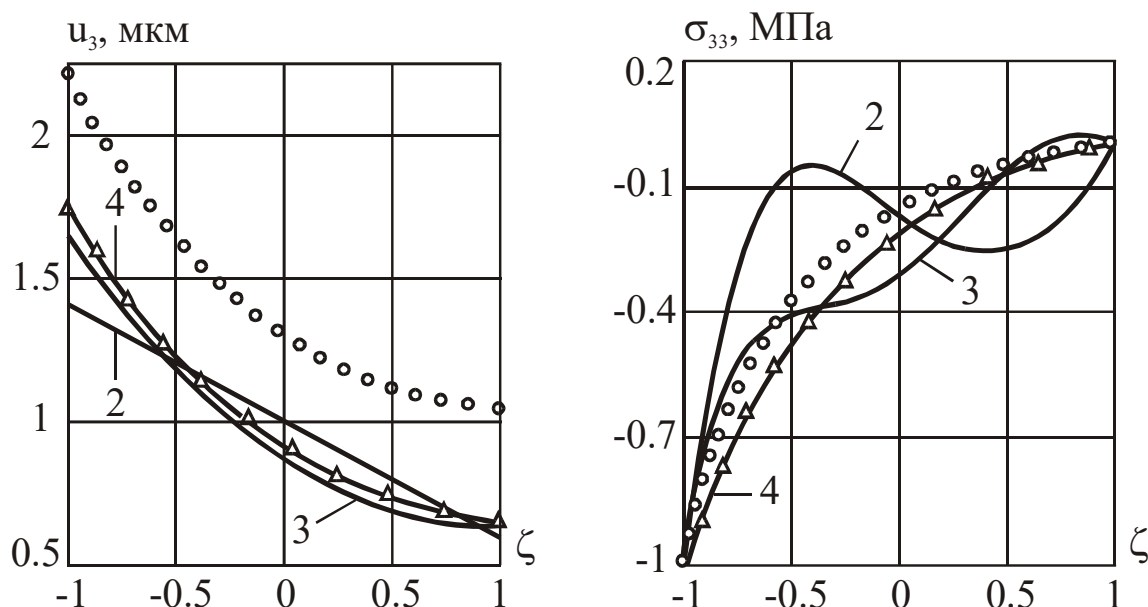


Рисунок 3. Розподіл переміщення u_3 й напруження σ_{33} по товщині циліндра

Використання більш складної теорії Рейсснера-Нагді [311] – зсувна модель (2,3,2,3,2) – дає однакові з теорією [319] значення напружень і практично точні значення радіального переміщення u_3 . Нарешті, найбільш точну й саму складну (з розглянутих варіантів) зсувну модель (4,3,4,3,2) має сенс застосовувати (у випадку збереження в теорії [318] доданків порядку $h/2R$ в порівнянні з

одиницею) для оболонок нетонких. Відповідно до роботи [307] теорія [318] може ефективно використовуватися при розв'язанні складних крайових завдань і для товстостінних анізотропних оболонок.

Приклад 2. Розглянемо вільно обпертий по торцях пружний циліндр довжини a і товщини h , навантаженого уздовж осі α_1 внутрішнім тиском:

$$q_3^- = -q_0 \sin(\gamma x_1); \quad \gamma = \pi/a. \quad (19)$$

З'ясуємо вплив вибору моделі оболонки на точність виконання фізичних співвідношень (18), що представляють аналітичні вирази перед варіаціями компонентів тензора напружень σ у варіаційному рівнянні Рейсснера.

Таблиця 2.

Чисельні результати для ε_{11}^k , ε_{11}^f , g_{11} , ε_{22}^k , ε_{22}^f і g_{22}

(l_i, l_{ii})	ζ	$\varepsilon_{11}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{11}^f \cdot 10^6$	g_{11}	$\varepsilon_{22}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{22}^f \cdot 10^6$	g_{22}
(2,2)	-0,5	0,399829	0,511001	27,8%	0,463247	0,322793	30,3%
	0	0,548617	0,576863	5,1%	0,354213	0,274820	22,4%
	0,5	1,497063	1,611097	7,6%	0,255562	0,344834	34,9%
(4,4)	-0,5	0,491604	0,498277	1,4%	0,456735	0,437503	4,2%
	0	1,147105	1,119041	2,4%	0,311048	0,316980	1,9%
	0,5	1,040397	1,075563	3,4%	0,218336	0,227028	4,0%
(7,7)	-0,5	0,577162	0,577129	0,005%	0,459970	0,460089	0,03%
	0	1,044640	1,044206	0,004%	0,306552	0,306130	0,1%
	0,5	1,051798	1,052067	0,03%	0,222546	0,222655	0,04%

У табл. 2 і 3 представлені по товщині (при $\zeta = 2z/h = -0.5; 0; 0.5$ і $n=10$) нетонкого ($h/R = 1/5$) циліндра значення деформацій ε_{ij} , обчислених по знайдених переміщеннях за допомогою співвідношень Коші – ε_{ij}^k і по знайдених напруженнях за допомогою фізичних співвідношень – ε_{ij}^f , а також відсоток відхилення $g_{ij} = 100 \cdot \left| \varepsilon_{ij}^k - \varepsilon_{ij}^f \right| / \left| \varepsilon_{ij}^k \right|$. При цьому співвідношення (18) у випадку точного розв'язку здобувають вигляд $\varepsilon_{ij}^k - \varepsilon_{ij}^f = 0$.

Таблиця 3.

Чисельні результати для ε_{33}^k , ε_{33}^f , g_{33} , ε_{13}^k , ε_{13}^f і g_{13}

(l_i, l_{ii})	ζ	$\varepsilon_{33}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{33}^f \cdot 10^6$	g_{33}	$\varepsilon_{13}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{13}^f \cdot 10^6$	g_{13}
(2,2)	-0,5	-1,717446	-1,533087	10,7%	5,705241	5,890870	3,3%
	0	-1,717446	-1,620833	5,6%	4,356362	5,378008	23,5%
	0.5	-1,717446	-1,930253	12,4%	3,007483	2,353035	21,7%
(4,4)	-0.5	-2,836757	-2,869214	1,1%	4,661366	4,861136	4,3%
	0	-2,061863	-2,057908	0,2%	4,953778	4,814179	2,8%
	0.5	-1,194527	-1,174107	1,7%	3,387747	3,522763	4,0%
(7,7)	-0.5	-3,127130	-3,126791	0,01%	5,076492	5,075608	0,02%
	0	-2,010297	-2,009545	0,04%	4,877213	4,875651	0,03%
	0.5	-0,997942	-0,997842	0,01%	3,291432	3,291405	0,0008%

Чисельні результати, що представлені в табл. 2 і 3, показують добру збіжність одержуваних шуканих величин в залежності від порядку уточнення обраної моделі оболонки, яка задається комбінацією параметрів (l_i, l_{ii}) .

Приклад 3. Розглянемо навантажену сталим внутрішнім тиском q_0 сферичну оболонку товщини h з двома співвісними круговими отворами однакового радіуса r_0 . Положення довільної точки в оболонці будемо визначати введеними в її серединній поверхні Ω_s радіуса R криволінійними ортогональними координатами θ , φ і z (лінії головної кривини оболонки – її меридіани і паралелі). Тут θ – кут між нормаллю до Ω_s і віссю обертання; φ – кут між фіксованою і минаючою через розглянуту точку Ω_s меридіанними площинами; z – відстань уздовж нормалі до поверхні Ω_s ($-h/2 \leq z \leq h/2$).

Поверхня Γ сферичної оболонки з двома співвісними полюсними отворами складається з бічних поверхонь Γ_s ($\theta = \theta_s$, $s=1, 2$) і двох лицьових внутрішньої Γ^- ($z = -h/2$) і зовнішньої Γ^+ ($z = h/2$) поверхонь, рівняння яких визначаються функціями ω_s і ω_- , ω_+ (при $\zeta = 2z/h$):

$$\omega_1 = \frac{\theta^2}{\theta_1^2} - 1; \quad \omega_2 = 1 - \frac{\theta^2}{\theta_2^2}; \quad \omega_+ = 1 - \zeta; \quad \omega_- = 1 + \zeta; \quad \omega_\zeta = \omega_+ \omega_- . \quad (20)$$

Граничні умови на лицьових поверхнях оболонки:

$$\Gamma^+ : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = 0, \quad \Gamma^- : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = t_3^- = -q_0 . \quad (21)$$

Нехай $\theta_0 = \pi/2$ – кут, що визначає площину, відносно якої симетричні полюсні отвори. Помістимо на лінії перетинання серединної поверхні Ω_s із площиною $\theta_0 = \pi/2$ початок безрозмірної координати $\vartheta = (\theta - \theta_0)/(\theta_0 - \theta_1)$. Інтервал значень ϑ визначається виразом $|\vartheta| \leq 1$ при зміні кута θ від $\theta = \theta_1$ до $\theta = \theta_2$ (рівняння бічних поверхонь першого і другого отворів відповідно). У силу осесиметричності задачі $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$ і $\sigma_{23} = 0$, тоді структури розв'язків для незалежних у функціоналі Рейсснера I_R шуканих компонентів переміщень u_i і напружень σ_{ij} здобувають вигляд (при $n_i = k(m_i + 1) + p + 1$; $n_i \Rightarrow n_{ij}$):

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=0}^{l_1-1} \sum_{p=0}^{m_1} a_1^{n_1} S(\vartheta) P_k(\zeta); \quad u_3 = \sum_{k=0}^{l_3-1} \sum_{p=0}^{m_3} a_3^{n_3} C(\vartheta) P_k(\zeta); \\ \chi \sigma_{11} &= (1 - \vartheta^2) \sum_{k=0}^{l_{11}-1} \sum_{p=0}^{m_{11}} a_{11}^{n_{11}} C(\vartheta) P_k(\zeta); \quad \chi \sigma_{22} = \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sum_{p=0}^{m_{22}} a_{22}^{n_{22}} C(\vartheta) P_k(\zeta); \\ \chi \sigma_{13} &= \sigma_{13}^* + \omega_\zeta (1 - \vartheta^2) \sum_{k=0}^{l_{13}-1} \sum_{p=0}^{m_{13}} a_{13}^{n_{13}} S(\vartheta) P_k(\zeta); \\ \chi^2 \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sum_{p=0}^{m_{33}} a_{33}^{n_{33}} C(\vartheta) P_k(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

де $a_i^{n_i}$, $a_{ij}^{n_{ij}}$ – шукані сталі; $C(\vartheta)$ и $S(\vartheta)$ – парна та непарна апроксимуючі функції ϑ ; $P_k(\zeta)$ – поліноми Лежандра; $\omega_\zeta = \omega_+ \omega_-$;

$$\sigma_{13}^* = -\frac{3Q_\theta^*}{2h} (1 - \zeta^2) \vartheta, \quad \sigma_{33}^* = -\frac{1}{2} (1 - h/2R)^2 \omega_+ q_0 . \quad (23)$$

Позначимо $p_0 = q_0 R / 2h$. Будемо вважати, що отвори закриті кришками такої конструкції, що передає на оболонку тільки дію поперечної сили Q_0^* , величину якої визначимо з умови рівноваги кришки:

$$2\pi r_0 Q_0^* + q_0 \pi r_0^2 = 0; \quad Q_0^* = -\frac{q_0 r_0}{2} = -\frac{p_0 h r_0}{R}. \quad (24)$$

Уведемо зведені переміщення $\tilde{u}_i$ і напруження $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$\tilde{u}_i = \frac{100 u_i}{h}; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{q_0}, \quad (25)$$

що набирають в результаті обчислення при $\zeta = -1$, $\zeta = 0$ або $\zeta = 1$ вигляду $\tilde{u}_i^-$, $\tilde{u}_i^0$ або $\tilde{u}_i^+$ відповідно (аналогічно $\tilde{\sigma}_{ij}^-$, $\tilde{\sigma}_{ij}^0$ або $\tilde{\sigma}_{ij}^+$).

Зведені напруження $\tilde{\sigma}_{11}$ ($\tilde{\sigma}_\theta$) і $\tilde{\sigma}_{22}$ ($\tilde{\sigma}_\varphi$), що визначають за формулами (25) збігаються з точністю до множника $2h/R$ з використовуваними в науковій практиці коефіцієнтами концентрації k_θ та k_φ :

$$k_\theta = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = \frac{\sigma_{11}}{q_0} \frac{2h}{R} = \tilde{\sigma}_{11} \frac{2h}{R}; \quad k_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{p_0} = \frac{\sigma_{22}}{q_0} \frac{2h}{R} = \tilde{\sigma}_{22} \frac{2h}{R}. \quad (26)$$

Як і в попередніх прикладах, числа l_i , l_{ii} апроксимацій компонент вектора $\mathbf{u}$ і тензора $\boldsymbol{\sigma}$ по товщині досліджуваної оболонки задають її модель, вибір якої визначається (при $i = 1, 2$) комбінацією величин $(l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$.

Обмежуючись у структурах розв'язків (22) для шуканих компонентів переміщень u_i і напружень σ_{ij} тим або іншим числом членів, ми, вочевидь, одержуватиме наближені вирази, які тим краще апроксимують дійсні переміщення й напруження, чим більше утримано членів у відповідних розкладаннях за умови збіжності рядів. Однак варто мати на увазі, що при використанні прикладних теорій оболонок відповідні цим теоріям математичні операції зазвичай виконані при втриманні в кінцевих рядах (22) лише декількох членів, тому побудовані таким методом теорії, замінюючи розв'язання тривимірної задачі деякою двовимірною задачею, не містять регулярного процесу уточнення і мають певну область свого застосування.

Розглянемо ортотропний сферичний пояс із геометричними і фізичними параметрами (при різних величинах співвідношення E_2/E_1):

$$\left. \begin{aligned} R &= 0.6 \text{ м}; \quad \theta_1 = \pi/4; \quad \theta_2 = 3\pi/4; \quad q_0 = 1 \text{ МПа}; \\ E_1 &= E_3 = 20 E_0; \quad G_{13} = E_0; \quad \nu_{ij} = 0.3; \quad E_0 = 1 \text{ ГПа}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

У результаті чисельної реалізації сформульованої задачі на рис. 4 і 5 для нетонкої (при $h/R = 0.2$) оболонки показані уздовж безрозмірної координати $r_\theta = 1 + (\theta - \theta_1)R/r_0$ по меридіану оболонки графіки розподілу зведених переміщень $\tilde{u}_1^0 = 100u_1^0/h$ і $\tilde{u}_3^0 = 100u_3^0/h$ та коефіцієнтів концентрації напружень $k_\theta^- = \sigma_{11}^-/p_0$ (при $\zeta = -1$) і $k_\phi^+ = \sigma_{22}^+/p_0$ (при $\zeta = 1$) залежно від анізотропії матеріалу оболонки. Цифри 1, 2, 3, 4, 5 біля побудованих графіків рис. 4 і 5 відповідають значенням співвідношення $E_2/E_1 = 4, 2, 1, 0.5, 0.25$, а штриховою лінією показаний графік для трансверсально-ізотропної ($E_2/E_1 = 1$) оболонки.

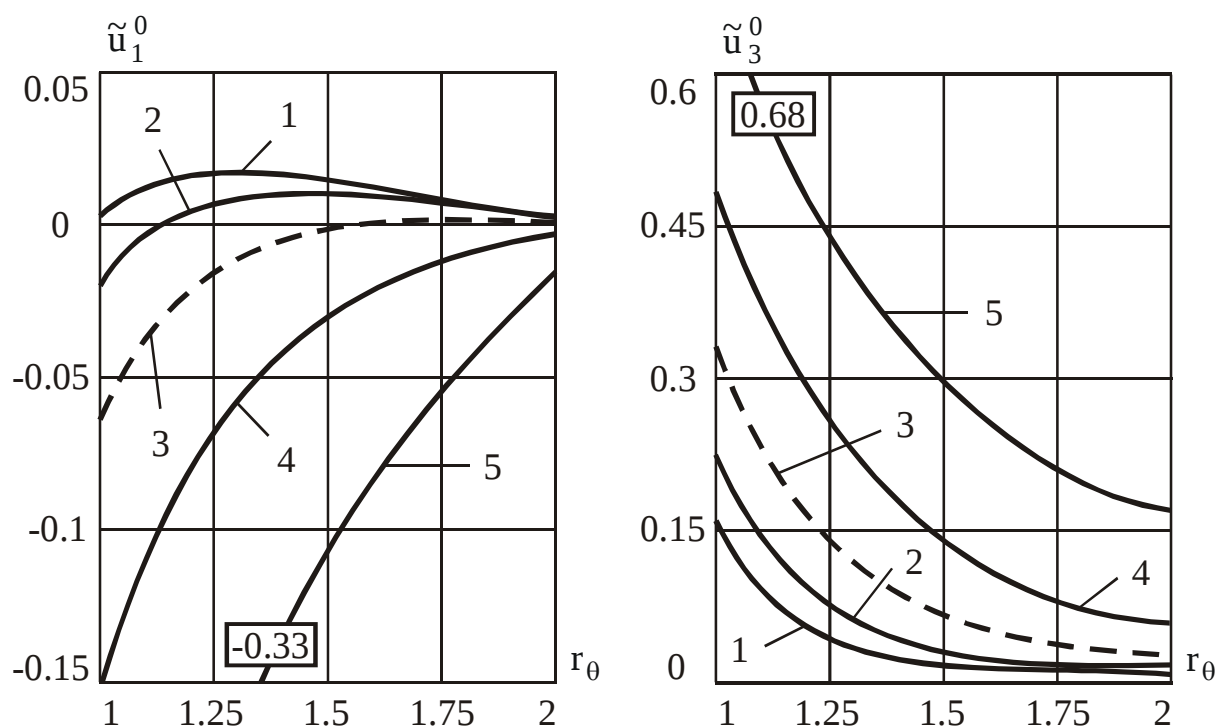


Рисунок 4. Графіки наведених переміщень $\tilde{u}_1^0$ і $\tilde{u}_3^0$

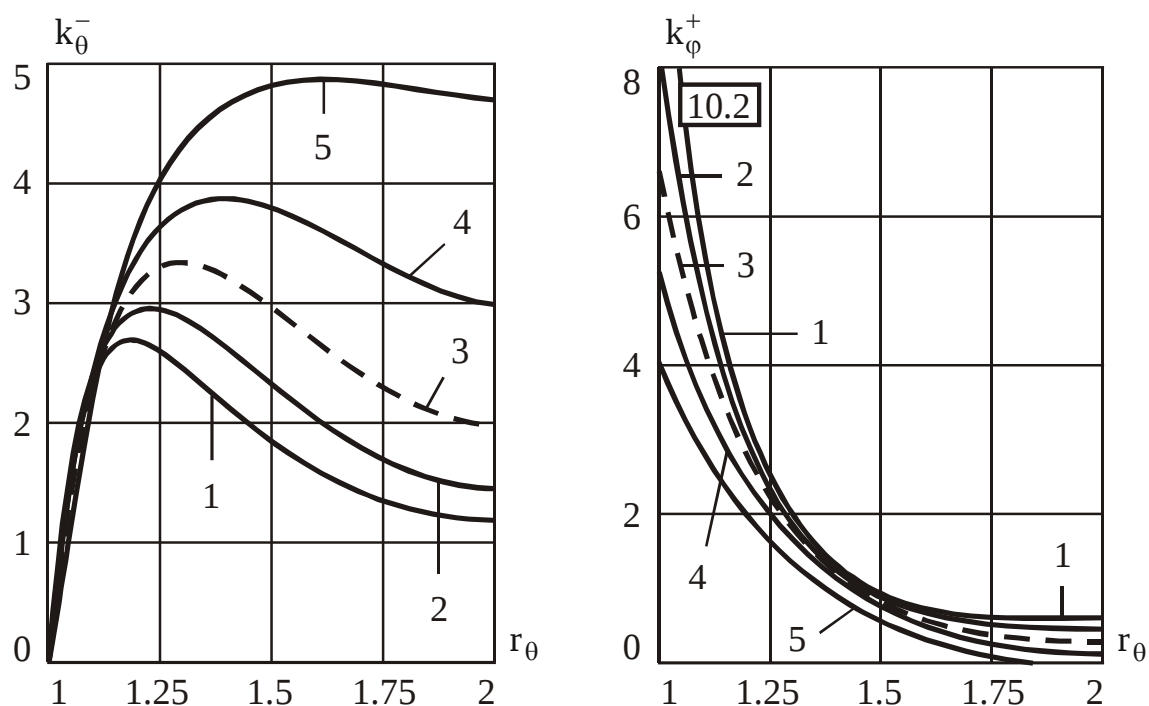


Рисунок 5. Графіки коефіцієнтів концентрації напружень k_{θ}^{-} і k_{ϕ}^{+}

У чисельній реалізації досліджуваної крайової задачі використана зсувна модель $l_i = l_{ij} = 5$ (при $m_i = m_{ij} = 15$) уточненій теорії оболонок п'ятого наближення. Як випливає із рис. 4 і 5, збільшення жорсткості E_2/E_1 в інтервалі $[0.25 \div 4]$ приводить у розглянутих прикладах до істотної зміни величин переміщень і напружень.

Ефективність і можливості варіаційного RVR-методу підтверджені успішним розв'язанням низки прикладних задач [14 ÷ 17] при проектуванні відповідальних оболонкових елементів конструкцій в різних галузях сучасної техніки. При цьому програмно здійснюваний в RVR-методі алгоритм [316] апостеріорної інтегральної оцінки точності чисельних розв'язків досліджуваних задач може стати надійним засобом перевірки достовірності одержуваних результатів, оскільки дозволяє автоматизувати пошук такої кількості апроксимацій, при якому процес збіжності розв'язків здобуває стійкий характер.