

SECTION 12. TRANSPORT

DOI: 10.46299/ISG.2024.MONO.TECH.4.12.1

12.1 Математична модель мінімізації втрат пройденої відстані

Розглянемо складову ΔS_1 втрати пройденої відстані через різницю довжини програмної та реальної траєкторій, яка характеризується траєкторною похибкою.

Управління судном за вибраним маршрутом протягом рейсу є багат шаровою ієрархічною системою, яка містить кілька рівнів складності і рішення кожного вищого рівня параметризує завдання наступного нижнього рівня (рис. 1).

Шар найбільшої складності – третій, вирішує завдання вибору програмної траєкторії руху судна, враховуючи два основні аспекти цього завдання. По-перше, константи середовища на маршруті переходу (кордони навігаційних небезпек, ізобати тощо) та детерміновані процеси (течії, припливно-відливні явища) визначають формування попередньої програмної траєкторії на весь перехід судна, що відповідає вимогам безпеки та економічності.

По-друге, у процесі реалізації програмної траєкторії можуть виникати ситуаційні обурення, що породжуються навколишніми суднами, які небезпечно рухаються, що вимагає розрахунку безпечних фрагментів програмної траєкторії з метою безпечного розходження. Проте завдання компенсації ситуаційних збурень у цій роботі не розглядається. Отже, завданням третього шару є формування програмної траєкторії руху судна.

Отримане рішення завдання програмного руху судна є вихідним для другого шару, на якому відбувається компенсація навігаційних обурень, тобто, вирішується завдання проводки судна за заданою програмною траєкторією. З цією метою здійснюється контроль поточного місця судна, та формуються параметри руху (курс та швидкість судна) для його проводки за програмною траєкторією, причому системою навігаційної інформації вимірюються необхідні

навігаційні параметри і потім розраховуються коригуючі значення параметрів руху.

На першому шарі розв'язання задачі проводиться стабілізація значень курсу та швидкості судна. Розв'язанням цього завдання є значення обертів гвинта (заданої швидкості) та кута кладки пера руля.

Системи ϑ_1 , ϑ_2 і C_t знаходяться на третьому шарі (рис. 1), з їх допомогою відбувається формування програмної траєкторії. Причому ϑ_2 – система знань про детерміновані процеси середовища, ϑ_1 – система знань про константи середовища на маршруті переходу, C_t – система, що вирішує і при необхідності коригує програмну траєкторію руху судна. Таким чином, зазначені системи вирішують задачу вибору вихідної траєкторії руху судна Tr_i .

Другий шар формують системи P_1 , P_{c1} та ϑ_{c1} , які вирішують завдання провідки судна по заданій траєкторії. Призначення систем такі:

P_1 – система, яка здійснює прогноз траєкторії руху судна на ділянку Tr_{ni} ;

P_{c1} – система, що стабілізує судно на траєкторії Tr_{ni} , розраховуючи поправки ΔK і ΔV з метою компенсації зносу судна;

ϑ_{c1} – інформаційна система, яка здійснює зворотні зв'язки та визначає поточні координати судна $\varphi(t)$ та $\lambda(t)$.

Перший шар складається з систем P_{c2} і ϑ_{c2} , і вирішують задачу стабілізації параметрів руху судна. Система ϑ_{c2} є інформаційною та визначає поточні параметри руху судна, система P_{c2} є системою стабілізації судна за курсом та швидкістю та формує керуючі впливи: кут кладки пера руля $\beta(t)$ та оберти двигуна $n(t)$.

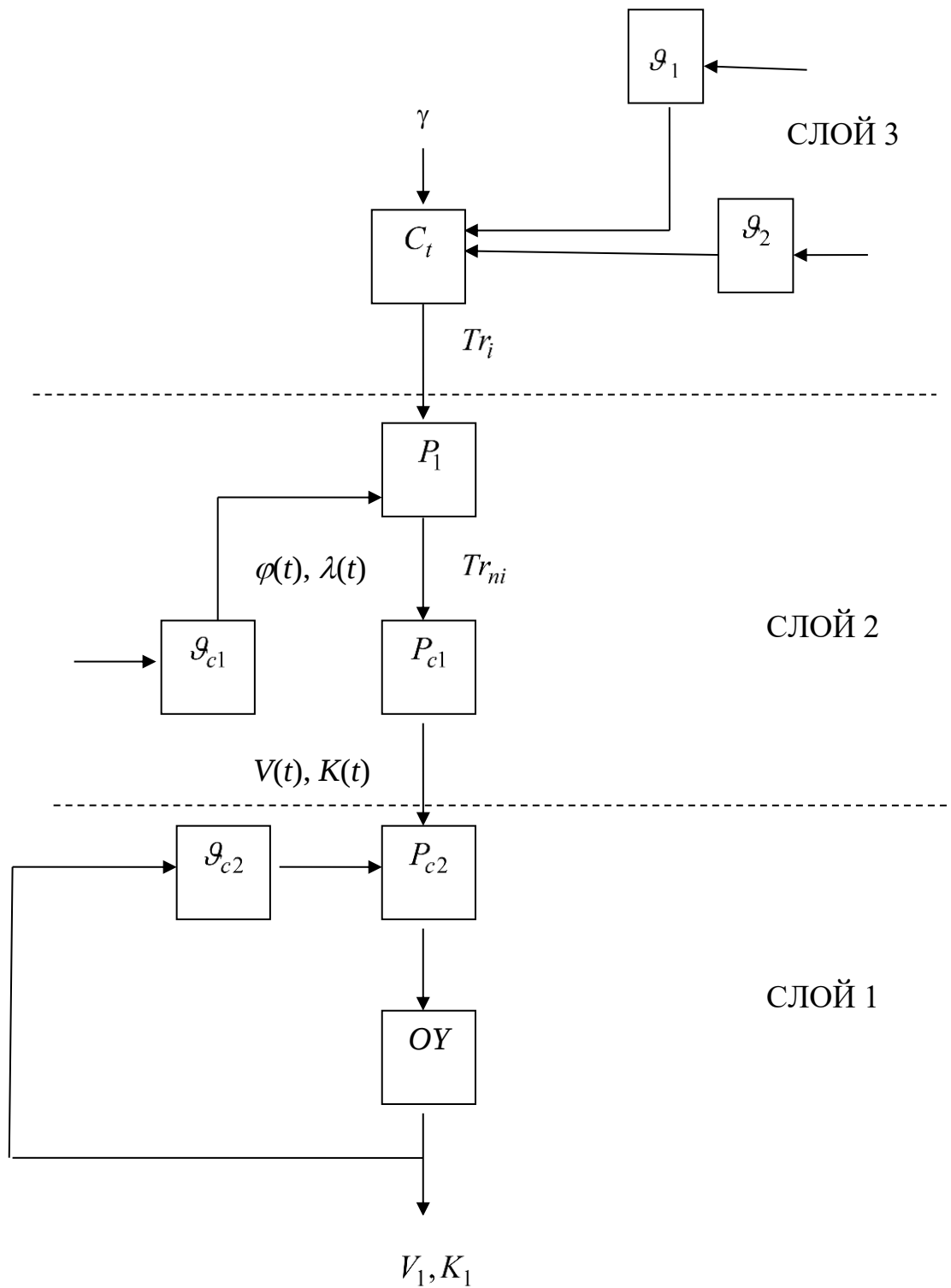


Рисунок 1. Багатошаровий опис системи керування судном

Усі три рівня розв'язання задачі функціонують у циклічному режимі, тільки періодичності циклів на кожному рівні є різними.

Так на першому рівні частота корекції програмної траєкторії, насамперед через зустріч з небезпечно рухомими цілями, є досить низькою, причому частота контролю навколишнього навігаційного стану з метою виявлення суден, що мають тенденцію до небезпечного зближення досить висока.

Частота визначення прирощень курсу чи швидкості ΔK і ΔV на другому рівні значно вища, а процес стабілізації параметрів руху судна практично безперервний.

Розглянемо вираз для дисперсії траєкторної похибки, враховуючи, що в умовах зовнішніх збурень застосовується спосіб коригувального водіння за обсерваціями [546], який ще називають способом постійного навігаційного режиму [547], тобто в дискретні моменти часу t (причому t приймає цілочисленні $0, 1 \dots$) визначаються обсервовані координати судна. Інтервал між обсерваціями Δt можна вважати постійним і протягом цього інтервалу судно слідує з незмінними параметрами руху K і V .

У кожен момент часу t істинне положення судна характеризується вектором $x(t)$ в системі координат $O \Delta \phi_t \Delta w_t$, початок якої знаходиться в програмній точці, що відповідає моменту часу t , а осі паралельні осям географічної системи координат (рис 2).

В результаті обсервації одержують оцінку $\hat{x}(t)$ вектора $x(t)$. Отримана величина оцінки вектору $\hat{x}(t)$ є оцінкою зносу судна, що накопичився до моменту часу t . Зазначений знос компенсується на момент часу $t + 1$, тобто за інтервал часу Δt , за допомогою вектору керуючих впливів судна $u(t)$. Причому вибір вектору $u(t)$ проводиться таким чином, щоб запобігти появі зносу судна до моменту часу $t + 1$.

Тому вектор $x(t + 1)$ в момент часу $t + 1$ (істинних положень судна), тепер уже заданий в системі координат $O \Delta \phi_{t+1} \Delta w_{t+1}$, початок якої належить програмній траєкторії і знаходиться в точці, яка відповідає моменту часу $t + 1$, визначається лінійним різницеvim стохастичним рівнянням [548] (рис 2):

$$x(t + 1) = x(t) + \Gamma\{u(t), \Delta t\} + \Gamma\{z(t), \Delta t\}, \quad (1)$$

де $\Gamma\{u(t), \Delta t\}$ – зміщення судна відносно програмної траєкторії за інтервал часу Δt в результаті прикладених керуючих впливів $u(t)$

$\Gamma\{z(t), \Delta t\}$ – переносне переміщення судна відносно програмної траєкторії під впливом зовнішнього збурення $z(t)$ за інтервал часу Δt .

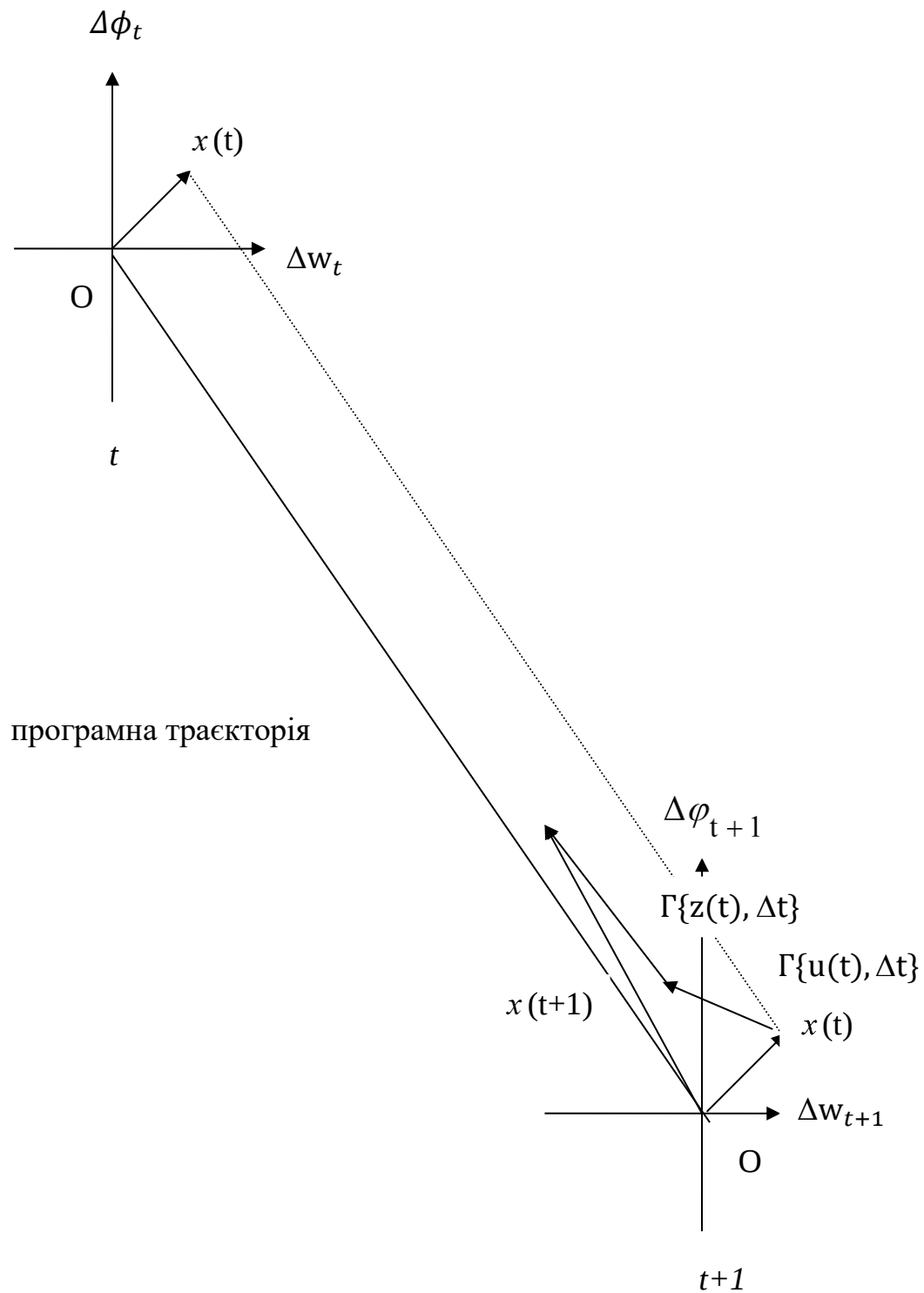


Рисунок 2. До складання різницевого стохастичного рівняння руху

Вочевидь, величина вектору $x(t + 1)$ значною мірою визначається значенням $\Gamma\{u(t), \Delta t\}$, що є керованим, оскільки залежить від вектору керуючих впливів $u(t)$. Для забезпечення мінімального значення вектору $x(t + 1)$ поступають наступним чином. Виходячи із значень величин V , Δt і $\hat{x}(t)$, в момент часу t відбувається прогноз очікуваного значення вектору $x(t + 1)$, причому прогнозоване значення позначимо $\bar{x}(t + 1)$. Для прогнозу використовується вектор вимірів $y(t)$, за допомогою якого проводиться оцінка $\hat{x}(t)$. Очевидно, прогноз доцільно робити за наступною рекурентною формулою:

$$\bar{x}(t + 1) = \bar{x}(t) + \Gamma\{u(t), \Delta t\} + \Gamma\{\hat{z}(t), \Delta t\} + M_1 [y(t)],$$

де $\bar{x}(t)$ – прогноз вектору $x(t)$ на момент часу t , зроблений під час попередньої обсервації в момент часу $(t - 1)$;

$M_1 [y(t)]$ – поправка до прогнозуючого стану $\bar{x}(t)$ з урахуванням вектору вимірів $y(t)$, причому поправка визначається за допомогою алгоритму M_1 , а в якості вихідних даних вибираються різниця між виміряними і прогнозованими значеннями вектору $x(t)$;

$u(t)$ – оцінка величини діючого обурення.

Переміщення $\Gamma\{u(t), \Delta t\}$ необхідно вибирати в такий спосіб, щоб величина прогнозу $\bar{x}(t + 1)$ оберталась в 0, тобто відповідно до залежності:

$$\Gamma\{u(t), \Delta t\} = -\bar{x}(t) - \Gamma\{\hat{z}(t), \Delta t\} - M_1[y(t)].$$

Якщо врахувати, що на попередньому інтервалі часу вибір переміщення $\Gamma\{u(t - 1), \Delta t\}$ проводився, виходячи з вимоги обертання в 0 прогнозу $\bar{x}(t)$, то отримаємо наступну залежність:

$$\Gamma\{u(t), \Delta t\} = -\Gamma\{\hat{z}(t), \Delta t\} - M_1[y(t)]$$

З отриманого виразу випливає, що $M_1[y(t)]$ є вектором перенесення в

системі координат $O\Delta\phi_t\Delta w_t$ і, очевидно, оцінка $\hat{x}(t)$ є величиною $M_1[y(t)]$, тобто $\hat{x}(t) = M_1[y(t)]$ або:

$$\hat{x}(t) = x(t+1) + \chi_{M_1}(t), \quad (2)$$

де $\chi_{M_1}(t)$ – похибка обсервації, яка також залежить від алгоритму M_1 .

Отже, з урахуванням останньої залежності, переміщення судна $\Gamma\{u(t), \Delta t\}$ може бути представлено наступним виразом:

$$\Gamma\{u(t), \Delta t\} = -\hat{x}(t) - \Gamma\{\hat{z}(t), \Delta t\}. \quad (3)$$

Очевидно, вихідне рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$x(t+1) = x(t) + \Gamma\{u(t), \Delta t\} + \Gamma\{z(t), \Delta t\} + G\{h(t), \Delta t\},$$

де $G\{h(t), \Delta t\}$ – зміщення судна, викликане похибками приладів числення, за інтервал часу Δt .

Підставляючи в останній вираз залежність (3), отримаємо:

$$x(t+1) = x(t) + \Gamma\{u(t), \Delta t\} + G\{h(t), \Delta t\} - \hat{x}(t) - \Gamma\{\hat{z}(t), \Delta t\}.$$

З урахуванням виразу (2) остання залежність набуває остаточного вигляду:

$$x(t+1) = \chi(t, \Delta t) + v(t, \Delta t) + \varepsilon(t, \Delta t),$$

де $\chi(t, \Delta t) = \chi_{M_1}(t, \Delta t)$;

$v(t, \Delta t) = \Gamma\{z(t), \Delta t\} - \Gamma\{\hat{z}(t), \Delta t\}$ – похибка в обліку впливу зовнішнього збурення $z(t)$;

$\varepsilon(t, \Delta t)$ – похибка, що виникає через похибки приладів числення, причому $\varepsilon(t, \Delta t) = G\{h(t), \Delta t\}$.

Вищевикладене проілюструємо за допомогою рис. 3. У момент часу t істинне місце судна визначалося б точкою M_0 (кінець вектору $x(t)$). До моменту часу $t + 1$, якби прогноз значення обурення збігся з його дійсним значенням, то судно виявилось б у точці M_2 , вважаючи, що похибки у показаннях приладів числення відсутні. При цьому вектор $x(t + 1)$ дорівнював би тільки похибки обсервації $\chi(t)$.

Оскільки прогнозоване переміщення судна під впливом зовнішніх збурень відрізняється від дійсного на величину $\nu(t, \Delta t)$, то за відсутності похибок приладів числення судно було б у точці M_3 , а вектор $x(t + 1)$ визначився б сумою похибок $\chi(t)$ і $\nu(t, \Delta t)$.

Наявність похибки приладів числення $\varepsilon(t, \Delta t)$ визначає місце судна в точці M_4 , при цьому вектор $x(t + 1)$ є сумою всіх трьох похибок $\chi(t)$, $\nu(t, \Delta t)$ і $\varepsilon(t, \Delta t)$. Тому, вектор $x(t)$ є випадковою двовимірною величиною, яку називатимемо похибкою траєкторного управління, або просто траєкторною похибкою, а послідовність значень $x(t)$ у часі є випадковим процесом з дискретним часом [548], який описує рух судна щодо програмної траєкторії.

Причому $x(t)$ є випадковим процесом, утвореним сумою трьох двовимірних процесів $\chi(t)$, $\nu(t, \Delta t)$ і $\varepsilon(t, \Delta t)$.

Так як основною характеристикою керованого руху судна є траєкторна похибка, то оцінкою якості керування судном можна вибрати коваріаційну матрицю траєкторної похибки, яку позначимо $R(t + 1)$, а її вираз має наступний вигляд, з урахуванням того, що всі три складові процесу незалежні:

$$R(t + 1) = E\{x(t + 1)x(t + 1)^T\} = K(t) + R_v(t, \Delta t) + R_e(t, \Delta t),$$

де $K(t)$, $R_v(t, \Delta t)$, $R_e(t, \Delta t)$ – коваріаційні матриці відповідно похибок обсервації $\chi(t)$, обліку впливу зовнішніх збурень $\nu(t, \Delta t)$ та приладів числення $\varepsilon(t, \Delta t)$.

Отже, можна вважати, що якість реалізації судном програмної траєкторії тим вища, чим менше елементи коваріаційної матриці $R(t)$ траєкторією похибки.

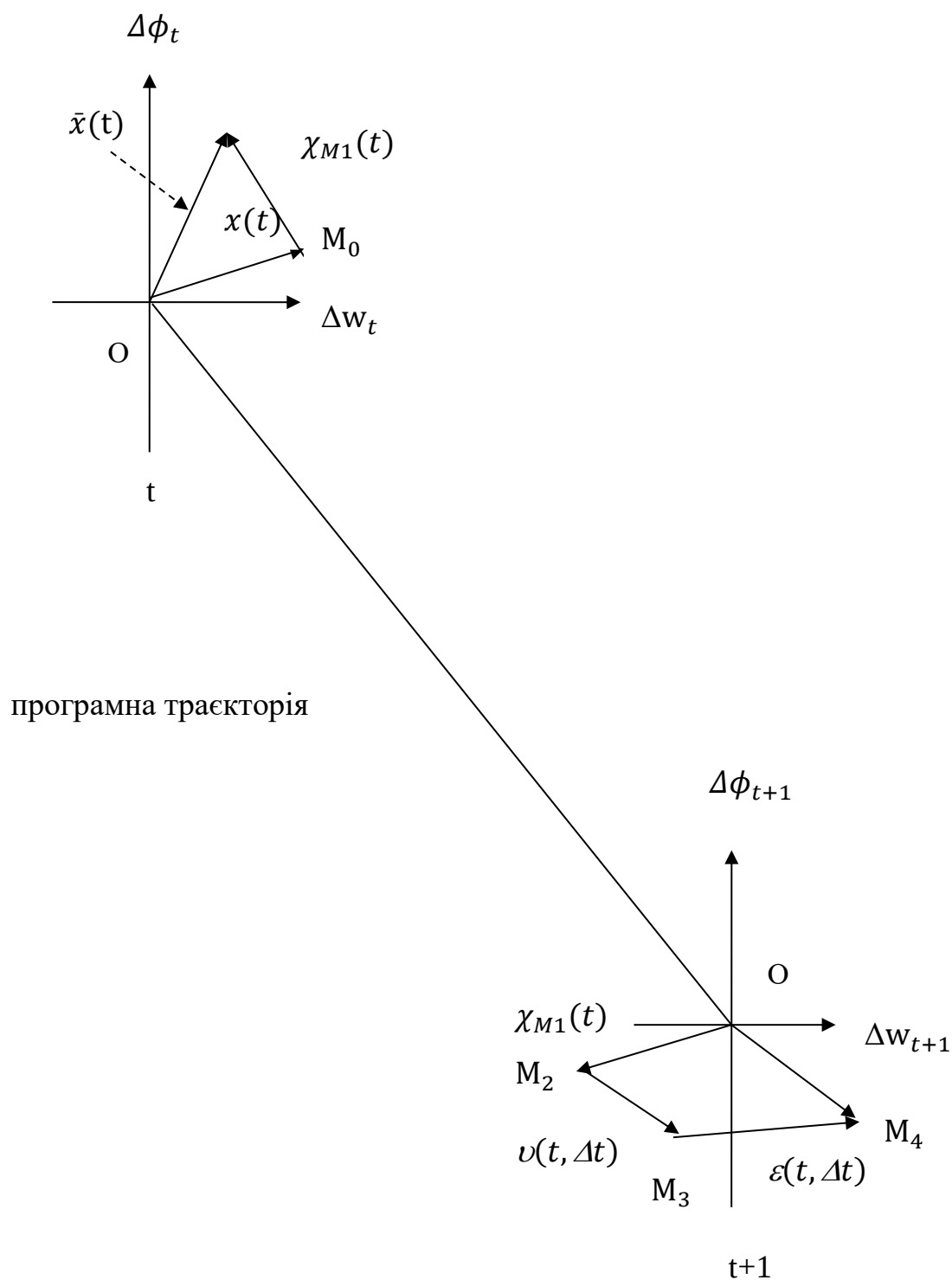


Рисунок 3. Формування траєкторної похибки керування судном

Так як коваріаційна матриця $R(t)$ є сумою коваріаційних матриць похибки обсервації $K(t)$, похибки обліку зовнішніх збурень $R_v(t, \Delta t)$ та похибки приладів числення $R_e(t, \Delta t)$, то необхідно ретельне вивчення факторів, що впливають на величину елементів кожної з розглянутих матриць та пошуку можливих шляхів формування необхідних значень факторів.

Розглянемо підступну матрицю похибок обсервації $K(t)$. Як відомо [549], обсервація полягає в отриманні оцінки істинних координат судна шляхом вимірювання параметрів навігаційних опорних навігаційних точок [550] штучного або природного походження, координати яких відомі.

Застосовуючи метод ліній положення, обсервоване місце судна визначається за допомогою апарату аналітичної геометрії як точка перетину двох та більше ліній положення. Наявність неминучих випадкових похибок у значеннях вимірюваних параметрів ставить завдання визначення ефективних обсервованих координат, точність яких як раз і характеризується коваріаційною матрицею $K(t)$.

Таким чином, вихідним для обсервації є вектор вимірювань навігаційних параметрів $y(t)$ і закон розподілу ймовірностей вектору його похибок $e(t)$.

Щільність розподілу є багатовимірною та визначається розмірністю вектору $y(t)$. Допустимо $y(t)$ є n -мірним вектором вимірювань, тоді вектор $e(t)$ описується n -мірною спільною щільністю розподілу, яку позначимо $g^*(t)$.

Якщо складові, – похибки вимірювань навігаційних параметрів, – вектору $e(t)$ позначити ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то спільна щільність має вигляд $g^*(t, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i)$ [551].

Метод ліній положення перетворює вектор вимірювань навігаційних параметрів $y(t)$ у вектор переносів $c(t)$ за такою формулою [552]:

$$c(t) = \|[y_i(t) - y_{ci}(t)] / g_i\|,$$

де $y_{ci}(t)$ – злічуване значення вимірюваного i -го навігаційного параметра $y_i(t)$;

$g_{i i}$ – його градієнт.

Відповідно і вектор похибок $e(t)$ перетворюється на вектор похибок $b(t)$:

$$b(t) = || \zeta_i / g_i || = || \xi_i ||,$$

де ζ_i – похибка і-ї лінії положення.

Спільна n - мірна щільність розподілу $g^*(t, \zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_i)$ перетворюється на вигляд $\tilde{g}(t, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_i)$.

Вектор перенесення $c(t)$ пов'язаний з істинними координатами судна $x(t)$ заданими в тій же системі координат, що і $c(t)$, наступним співвідношенням, наведеним в [553]:

$$c(t) = \theta_1 x(t) + b(t),$$

де

$$c(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \dots \\ r_n(t) \end{bmatrix}; c(t) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ \cos \alpha_n & \sin \alpha_n \end{bmatrix}; b(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

тут $r_i(t)$ – перенесення і-ї лінії положення;

α_i – напрям градієнта g_i і-го навігаційного параметра відносно меридіана в точці, що злічується.

Для визначення ефективності обсервованих координат $\hat{x}(t)$, причому $\hat{x}(t) = || \Delta \hat{\varphi}, \Delta \hat{w} ||$, застосовується метод максимальної правдоподібності [554], який при розподілі похибок за законом Гауса трансформується в метод найменших квадратів або метод найменшої квадратичної форми (для випадків незалежних та залежних вимірів відповідно) [553].

Розглянемо загальний випадок довільного розподілу похибок вимірів. Оцінка ефективності обсервованих координат можлива за умови незалежності похибок вимірювань ξ_i , коли спільна щільність розподілу $\tilde{g}(t, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_i)$ може

бути представлена у вигляді добутку часток щільностей розподілу кожної похибки. У разі залежних похибок ξ_i їх можна замінити еквівалентним вектором тієї ж розмірності незалежних випадкових величин, що мають таку ж спільну щільність розподілу, як і $b(t)$ [555].

Припустимо, що вектор $b(t)$ є вектором незалежних похибок із частками щільностей розподілу $f_i(\xi_i, \mu_i)$, де μ_i – параметри розподілу. Звертаємо увагу на ту обставину, що щільність розподілу $f_i(\xi_i, \mu_i)$, похибки лінії положення ξ_i однозначно визначається щільністю розподілу $\psi_i(\zeta_i, h_i)$ похибки вимірювання навігаційного параметра ζ_i . Якщо врахувати, що значення градієнта g_i у злічуваній точці постійно, то згідно [555]:

$$f_i(\xi_i, \mu_i) = |g_i| \psi_i(g_i, \zeta_i, h_i). \quad (4)$$

Не зупиняючись на процедурі пошуку ефективних обсервованих координат $\hat{x}(t)$ методом максимальної правдоподібності, звернемо увагу на отримання коваріаційної матриці $K(t)$, що характеризує їх точність. При цьому слідуватимемо ідеї, викладеної в [555].

Для даного випадку похибка ξ_i має вигляд:

$$\xi_i = r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i.$$

Тому логарифм функції правдоподібності, що позначається $\Phi_n[c(t), x(t)]$ визначається виразом:

$$\Phi_n[c(t), x(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f_i(t, r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i, \mu_i)$$

З метою зручності запису опустимо у формулах t і μ_i , маючи на увазі їх наявність, тому:

$$\Phi_n[c(t), x(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i, \mu_i).$$

Припускаємо, що функція f_i досить гладка і має першу та другу похідні за змінними $\Delta\varphi$ і Δw . У цьому випадку коваріаційна матриця визначається з виразу [555]:

$$K(\Delta\varphi, \Delta w) = D^{-1}/n,$$

де

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{R_1} A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) \times f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i)$$

Вектор $A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w)$ знаходиться за формулою:

$$A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) = \left\| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \Delta\varphi} \ln [f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i)] \\ \frac{\partial}{\partial \Delta w} \ln [f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i)] \end{array} \right\|.$$

За правилами диференціювання складної функції отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\varphi} \ln [f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i)] = -\cos \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} [f_i(\xi_i)] / f_i(\xi_i),$$

пам'ятаючи, що $r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i = \xi_i$.

Аналогічно:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta w} \ln [f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \Delta w \sin \alpha_i)] = -\sin \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} [f_i(\xi_i)] / f_i(\xi_i).$$

Отже, можна записати:

$$A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) = \left\| \begin{array}{l} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{array} \right\| \frac{\partial}{\partial \xi_i} [f_i(\xi_i)] / f_i(\xi_i),$$

а відповідна транспонована матриця $A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w)$ має вигляд:

$$A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) = -\|\cos \alpha_i \sin \alpha_i\| \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[f_i(\xi_i) \right] / f_i(\xi_i).$$

Тому добуток матриць $A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) \times A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w)$ з урахуванням отриманих виразів набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} & A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) \times A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) = \\ & = \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[f_i(\xi_i) \right] / f_i(\xi_i) \right\}^2 \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{array} \right\| \end{aligned}$$

Знайдемо математичне очікування від отриманого виразу:

$$\begin{aligned} & \int_{R_1} A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) \times f_i(r_i(t) - \Delta\varphi \cos \alpha_i - \\ & \quad - \Delta w \sin \alpha_i) = \\ & = \int_{R_1} A_i(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) A_i^T(r_i(t), \Delta\varphi, \Delta w) \times f_i(\xi_i) d\xi_i = \\ & = \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{array} \right\| \int_{R_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[f_i(\xi_i) \right] / f_i(\xi_i) \right\}^2 f_i(\xi_i) d\xi_i. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $f_i(\xi_i) = f_i(\xi_i, \mu_i)$ вводимо позначення:

$$\int_{R_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[f_i(\xi_i) \right] / f_i(\xi_i) \right\}^2 f_i(\xi_i) d\xi_i = \rho(\mu_i),$$

причому аналітичний вид функції ρ однозначно визначається типом щільності розподілу f_i .

З урахуванням вищевикладеного, матриця D набуває вигляду:

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{array} \right\| \rho(\mu_i) =$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \rho(\mu_i) & \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) & \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \rho(\mu_i) \end{array} \right\|.$$

Тепер можна знайти коваріаційну матрицю $K(\Delta\varphi, \Delta w)$, використовуючи раніше отримані вирази:

$$K(\Delta\varphi, \Delta w) = \frac{1}{\Delta n^2} \left\| \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \rho(\mu_i) & - \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) \\ - \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) & \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \rho(\mu_i) \end{array} \right\|,$$

де Δ – визначник матриці D , який дорівнює:

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \{ \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \rho(\mu_i) \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \rho(\mu_i) - [\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i)]^2 \}.$$

З урахуванням виразу (4) отримаємо остаточний вираз для коваріаційної матриці $K(\Delta\varphi, \Delta w)$:

$$K(\Delta\varphi, \Delta w) = \left\{ \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \rho(\mu_i) \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \rho(\mu_i) - \left[\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) \right]^2 \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \rho(\mu_i) & - \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) \\ - \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \rho(\mu_i) & \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \rho(\mu_i) \end{array} \right\|, \quad (5)$$

де $\hat{\mu}_i = g_i \mu_i$.

Аналіз отриманого виразу (5) дозволяє зробити висновок про те, що коваріаційна матриця обсервації $K(\Delta\varphi, \Delta w)$. Аналіз отриманого виразу (5) дозволяє зробити висновок про те, що коваріаційна матриця обсервації n , типом щільності розподілу f_i похибок навігаційних вимірювань та її параметрами μ_i , а

також залежить від модулів g_{i_i} та напрямків α_i градієнтів навігаційних параметрів у точці, що злічується.

Як раніше зазначали, отримання коваріаційній матриці $K(t)$ вектора вимірювань навігаційних параметрів $y(t)$ передбачає застосування методу максимальної правдоподібності, який забезпечує мінімальну матрицю $K(t)$ за умови, що істинна щільність розподілу похибок $f(\xi)$ збігається з використовуваною для оцінки щільністю $\phi(\xi)$ [555]. У судноводінні прийнято гіпотезу про нормальний розподіл похибок вимірювань, хоча останнім часом виникли передумови для застосування альтернативних розподілів.

Якщо істинна щільність розподілу $f(\xi)$ відрізняється від розподілу Гаусса, то коваріаційна матриця, яка отримана методом найменшої квадратичної форми буде перевищувати її мінімально можливе значення.

В роботі [556] розглянуто два змішані закони розподілу ймовірностей, щільності яких мають наступний аналітичний вигляд:

$$f_1(\xi) = \frac{A_m}{(\xi^2/2 + \lambda)^{m+1}}; \quad f_2(\xi) = \frac{A_m^*}{(\xi^2/2 + \lambda)^{m+3/2}},$$

де A_m і A_m^* – нормуючі множники;

m – суттєвий параметр, що приймає цілочисленне значення;

λ – масштабний параметр.

У цій же роботі були знайдені вирази для ефективності оцінок вимірювань при використанні методу найменших квадратів за умови розподілу похибок за згаданими законами, причому ефективності позначені через e_1 і e_2 та мають такий аналітичний вираз:

$$e_1 = 1 - \frac{3}{2m^2 + 3m + 1}; \quad e_2 = 1 - \frac{3}{2m^2 + 5m + 3}.$$

У цьому випадку коваріаційна матриця обсервації збільшується в e^{-1} раз в порівнянні з мінімально можливою. В обох випадках ефективність e зростає із зростанням суттєвого параметра m , як показано в табл. 1.

Таким чином, коваріаційна матриця обсервації $K(\Delta\varphi, \Delta w)$ залежить від відповідності справжнього закону розподілу похибок вимірювань передбачуваному.

Як раніше було показано, коваріаційна матриця траєкторією похибки $R(t+1)$ крім коваріаційної матриці обсервації $K(t)$ залежить також від коваріаційної матриці $R_v(t, \Delta t)$ похибок обліку зовнішніх збурень і коваріаційної матриці $R_e(t, \Delta t)$ похибок приборів числення.

Таблиця 1

Ефективність квазіправдоподібних оцінок

m	1	2	3	4	5	6	7	10
e_1	0,500	0,800	0,893	0,933	0,955	0,967	0,975	0,978
e_2	0,700	0,857	0,917	0,945	0,962	0,971	0,978	0,988

Основною особливістю зазначених матриць є залежність їх елементів від інтервалу часу Δt між обсерваціями. Тому обидві похибки можна поєднати в одну $\eta(t, \Delta t)$ з коваріаційною матрицею $R_n(t, \Delta t) = R_v(t, \Delta t) + R_e(t, \Delta t)$.

Складові похибки числення $\Delta\varphi$ і Δw визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \delta V \Delta t \cos(K + \delta K) = \delta V \Delta t \cos(K) - \delta K \delta V \Delta t \sin(K) \\ \delta w &= \delta V \Delta t \sin(K + \delta K) = \delta V \Delta t \sin(K) - \delta K \delta V \Delta t \cos(K),\end{aligned}\quad (6)$$

де δK і δV – похибки у прогнозі курсу та швидкості судна, що включають похибки приладів числення та оцінки зовнішніх збурень.

Отже, коваріаційні матриці обсервації $K(t)$ і $R_n(t, \Delta t)$ залежать від точності приладів системи навігаційної інформації, як впливає з виразів (5) та (6).

Очевидно, що ймовірність визначення навігаційних параметрів системою навігаційної інформації залежить від експлуатаційної надійності її приладів, тому коваріаційна матриця траєкторної похибки $R(t)$ також є функцією експлуатаційної надійності системи навігаційної інформації.

Зазначимо, що коваріаційна матриця $R(t)$ траєкторної похибки $\eta = x(t) \eta$, як двовимірної величини, може бути позначена $R(x, y)$ і виражається через центральні та змішані моменти другого порядку наступним чином:

$$R(x, y) = \begin{bmatrix} D_x & D_{xy} \\ D_{yx} & D_y \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Для виключення недіагонального елемента $D_{xy} = D_{yx}$ коваріаційної матриці $R(x, y)$ при відомих елементах D_x , D_y і D_{xy} , необхідно розрахувати кут повороту γ , який визначається умовою [551]:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2D_{xy}}{D_x - D_y}.$$

При повороті на цей кут змінюються значення дисперсій D_x та D_y , що характеризують діагональну коваріаційну матрицю, яку позначимо $R(x, y)_1$, нові значення дисперсій позначені D_{x1} і D_{y1} , тобто:

$$R(x, y)_1 = \begin{bmatrix} D_{x1} & 0 \\ 0 & D_{y1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Матриця $R(x, y)_1$, а отже і її елементи D_{x1} і D_{y1} визначаються за допомогою співвідношення [554]:

$$R(x, y)_1 = GR(x, y)G^T,$$

де G – матриця перетворення, елементи якої, як показано в [554], визначаються наступними формулами:

$$g_{11} = g_{22} = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(D_x - D_y)}{\sqrt{4D_{xy}^2 + (D_x - D_y)^2}} \right] \right\}^{1/2},$$

$$g_{21} = -g_{12} = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(D_x - D_y)}{\sqrt{4D_{xy}^2 + (D_x - D_y)^2}} \right] \right\}^{1/2}.$$

Нові значення дисперсій розраховуються за формулами:

$$D_{x1} = \frac{1}{2} [D_x + D_y + \sqrt{4D_{xy}^2 + (D_x - D_y)^2}];$$

$$D_{y1} = \frac{1}{2} [D_x + D_y - \sqrt{4D_{xy}^2 + (D_x - D_y)^2}]. \quad (9)$$

Отриманий вираз коваріаційної матриці характеризує випадкову траєкторну похибку η при русі судна на прямолінійних ділянках програмної траєкторії. Крім випадкової траєкторної похибки на прямолінійних ділянках програмної траєкторії руху судна через нищпорення судна виникає його бічне зміщення, величина якого носить детермінований характер і визначається якістю утримання судна на заданому курсі. Тому має враховуватися максимальне значення бічного зсунення.

При поворотах судна з однієї програмної ділянки на іншу, коли судно слідує криволінійною траєкторією, виникає похибка повороту ξ через відмінність прогнозованої траєкторії повороту від реальної, яка характеризується коваріаційною матрицею $R(x,y)_\xi$.

Однак оперувати коваріаційними матрицями незручно, бажано, щоб показник траєкторної похибки виражався скалярною характеристикою.

Для вибору скалярного показника звертаємо увагу на те, що в діагональній коваріаційній матриці $R(x,y)_1$ (5) значення діагональних елементів D_{x1} і D_{y1} є

дисперсіями складових двовимірної векторіальної траєкторної похибки η по ортогональних осях. Отже, сума цих дисперсій є дисперсією модуля векторіальної траєкторної похибки D_1 , тобто $D_1 = D_{x1} + D_{y1}$.

Якщо траєкторна похибка характеризується коваріаційною матрицею $R(x,y)$, другі змішані моменти якої не дорівнюють нулю, то сума дисперсій D_x та D_y , що є її діагональними елементами, також дорівнює дисперсії модуля векторної траєкторної похибки D_1 . Інакше кажучи, $D_1 = D_{x1} + D_{y1} = D_x + D_y$.

Справедливість цього твердження випливає з виразів (9). Дійсно, скористаємося формулами для D_{x1} і D_{y1} , в результаті чого отримаємо:

$$D_{x1} + D_{y1} = \frac{1}{2}[D_x + D_y + \sqrt{4D_{xy}^2 + (D_x - D_y)^2}] + \frac{1}{2}[D_x + D_y - \sqrt{4D_{xy}^2 + (D_x - D_y)^2}] = D_x + D_y.$$

Отже, скалярною характеристикою коваріаційної матриці $R(x,y)$, незалежно від величини її других змішаних моментів, є дисперсія модуля векторної траєкторної похибки η , тобто $D = D_x + D_y$.

Вочевидь, аналогічне твердження справедливе й у коваріаційної матриці $R(x,y)_\xi$ векторіальної похибки повороту ξ , та її скалярною характеристикою є дисперсія модуля похибки ξ тобто $D_\xi = D_{\xi x} + D_{\xi y}$.

Таким чином, стохастичними скалярними характеристиками якості реалізації програмної траєкторії руху судна є величина D на прямолінійних ділянках траєкторії і величина D_ξ – на ділянках повороту. Тому в якості стохастичного показника Q_s векторіальної траєкторної похибки доцільно вибрати суму дисперсій модулів векторіальних похибок η і ξ , тобто:

$$Q_s = D + fD_\xi, \quad (10)$$

де f – коефіцієнт, менше 1 і враховує співвідношення частот обсервації та поворотів судна.

Векторіальну похибку η можна подати сумою двох похибок: похибки обсервації $\chi(t)$ та похибки прогнозу програмних координат θ за інтервал часу Δt . Причому похибка прогнозу θ , у свою чергу, є сумою похибок обліку впливу зовнішніх збурень $\upsilon(t, \Delta t)$ та приладів числення $\varepsilon(t, \Delta t)$. Отже:

$$D = D_{\chi} + D_{\theta},$$

а стохастичний показник:

$$Q_s = D_{\chi} + D_{\theta} + fD_{\xi}.$$

Таким чином, показник Q_s у скалярному вираженні відображає точність обсервації, прогнозу та управління судном при повороті, тобто. показники системи інформації C_I та системи управління судном C_C .

Покажемо, що обраний стохастичний показник ефективності Q_s , також содержит характеристики також містить властивості системи забезпечення структурної стійкості C_R , показники надійності одержання дисперсій D_{χ} , D_{θ} та D_{ξ} . Зазначимо, що система інформації C_I містить альтернативні джерела отримання обсервованих координат судна з різною точністю та ймовірністю їх отримання. Припустимо, в системі інформації для отримання обсервованих координат можна використовувати супутникову систему GPS, точність якої D_G і коефіцієнт готовності K_{GG} , який характеризує можливість справної роботи приймача в будь-який момент часу. Другим альтернативним джерелом отримання обсервованих координат є РЛС з дисперсією D_R та коефіцієнтом готовності K_{GR} .

Також обсервоване місце судна можна отримати за допомогою гірокомпасу, який забезпечує обсервацію з дисперсією D_{GK} та коефіцієнтом

готовності $K_{ГГК}$. Вочевидь, має місце співвідношення між точностями зазначених систем $D_G < D_R < D_{ГК}$. Тому найбільш бажана обсервація з точністю D_G , у разі неможливості отримати обсервацію по GPS використовується РЛС з точністю D_R . Обсервація з точністю $D_{ГК}$ відбувається у разі відсутності можливості визначитися з GPS та РЛС. Зазначений алгоритм використання приладів системи інформації для визначення місця судна встановлює таке відношення переваги:

$$\text{GPS} > \text{РЛС} > \text{ГК}. \quad (11)$$

Сукупність приладів, призначених для отримання обсервованих координат, (у нашому випадку GPS, РЛС та ГК) можна розглядати як систему обсервації S_{ob} , що є підсистемою системи навігаційної інформації C_1 . Кожен із приладів системи S_{ob} може бути в одному з двох станів: справному чи відмови, тому з погляду працездатності система обсервації характеризується безліччю станів, число яких N дорівнює 2^m (m – число приладів у системі). В нашому випадку $m=3$ і, отже, $N=8$. Позначимо безліч станів системи обсервації S_{ob} через $M_Z = \{Z_i\}$ ($i=1 \div 8$). Якщо позначити справний стан приладу через 1, а стан відмови – через 0, то стан Z_i системи обсервації S_{ob} представимо в табл. 2.

Останній рядок в таблиці містить інформацію про точність системи обсервації в кожному із станів з урахуванням прийнятого відношення переваги (11).

Таблиця 2.

Перелік станів системи обсервації

Z_i	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8
GPS	1	1	1	1	0	0	0	0
РЛС	1	0	1	0	1	1	0	0
ГК	1	1	0	0	1	0	1	0
$D_{ГК}$	D_G	D_G	D_G	D_G	D_R	D_G	$D_{ГК}$	-

Враховуємо, що ймовірність знаходження i -го приладу системи S_{ob} у справному стані $P_i(1) = K_{Гі}$, а ймовірність того, що прилад перебуває у стані відмови – $P_i(0) = 1 - K_{Гі}$. З урахуванням цього зауваження ймовірності перебування системи обсервації у стані Z_i , які позначимо $P(Z_i)$, наведені у табл. 3.

Неважко переконатися, що $\sum_{i=1}^8 P(Z_i) = 1$, оскільки $K_{Гі} \leq 1$. Очевидно, що дисперсія модуля векторної похибки обсервації D_χ з урахуванням структури системи обсервації S_{ob} виражається наступним чином:

$$D_\chi = D_G P_G + D_R P_R + D_{ГК} P_{ГК}, \quad (12)$$

де $P_G, P_R, P_{ГК}$ – ймовірності використання для обсервації відповідно GPS, РЛС та ГЛ з урахуванням відношення переваги.

Таблиця 3.

Значення ймовірностей $P(Z_i)$

Z_i	GPS	РЛС	ГЛ	$P(Z_i)$
Z_1	1	1	1	$P(Z_1) = K_{ГГ} K_{ГР} K_{ГГК}$
Z_2	1	0	1	$P(Z_2) = K_{ГГ} (1 - K_{ГР}) K_{ГГК}$
Z_3	1	1	0	$P(Z_3) = K_{ГГ} K_{ГР} (1 - K_{ГГК})$
Z_4	1	0	0	$P(Z_4) = K_{ГГ} (1 - K_{ГР}) (1 - K_{ГГК})$
Z_5	0	1	1	$P(Z_5) = (1 - K_{ГГ}) K_{ГР} K_{ГГК}$
Z_6	0	1	0	$P(Z_6) = (1 - K_{ГГ}) K_{ГР} (1 - K_{ГГК})$
Z_7	0	0	1	$P(Z_7) = (1 - K_{ГГ}) (1 - K_{ГР}) K_{ГГК}$
Z_8	0	0	0	$P(Z_8) = (1 - K_{ГГ}) (1 - K_{ГР}) \times$ $\times (1 - K_{ГГК})$

Аналізуючи табл. 2, відзначаємо, що ймовірність P_G використання GPS при обсервації місця судна є сумою ймовірностей станів, в яких GPS знаходиться у справному стані. станами є Z_1, Z_2, Z_3 і Z_4 , тому:

$$P_G = K_{IG}K_{IR}K_{IGK} + K_{IG}(1 - K_{IR})K_{IGK} + K_{IG}K_{IR}(1 - K_{IGK}) + K_{IG}(1 - K_{IR}) \times \\ \times (1 - K_{IGK}),$$

або

$$P_G = K_{IG}$$

РЛС використовується для обсервації у разі, якщо неможливо отримати інформацію від GPS, тобто в станах Z_5 і Z_6 , отже, ймовірність P_R визначається виразом:

$$P_R = (1 - K_{IG})K_{IR}K_{IGK} + (1 - K_{IG})K_{IR}(1 - K_{IGK}),$$

або

$$P_R = (1 - K_{IG})K_{IR}.$$

Визначення місця судна по ГК здійснюється тільки в стані Z_7 , коли GPS та РЛС не можуть бути використані для обсервації. Очевидно, у такому разі:

$$P_{GK} = (1 - K_{IG})(1 - K_{IR})K_{IGK}$$

Ймовірність працездатного стану P_{ob} системи обсервації S_{ob} є сумою ймовірностей P_G , P_R і P_{GK} , тобто

$$P_{ob} = P_G + P_R + P_{GK} = K_{IG} + (1 - K_{IG})K_{IR} + (1 - K_{IG})(1 - K_{IR})K_{IGK} = K_{IG} + \\ + K_{IR} - K_{IG}K_{IR} + K_{IGK}(1 - K_{IG} - K_{IR} + K_{IG}K_{IR}),$$

або

$$P_{ob} = 1 - 1 + K_{IG} + K_{IR} - K_{IG}K_{IR} + K_{IGK}(1 - K_{IG} - K_{IR} + K_{IG}K_{IR}) = 1 - (1 - \\ - K_{IG})(1 - K_{IR})(1 - K_{IGK}).$$

Ймовірність втрати працездатності $\overline{P_{ob}}$ системи S_{ob} дорівнює ймовірності стану Z_8 , тобто:

$$\overline{P_{ob}} = P(Z_8) = (1 - K_{IG})(1 - K_{IR})(1 - K_{IGK}).$$

Вочевидь, що $P_{ob} + \overline{P_{ob}} = 1$, що й доводиться коректність отриманих виразів для ймовірностей P_G , P_R і P_{GK} .

Таким чином, дисперсія модуля векторіальної похибки обсервації D_χ (12) набуває вигляду:

$$D_\chi = D_G K_{IG} + D_R (1 - K_{IG}) K_{IR} + D_{GK} (1 - K_{IG})(1 - K_{IR}) K_{IGK}.$$

У випадку, коли система обсервації містить n незалежних приладів, з погляду працездатності вона характеризується 2^n станами, які характеризуються різними поєднаннями станів працездатності і відмов приладів системи обсервації. Якщо дисперсії обсервації приладів задовольняють нерівність:

$$D_1 < D_2 < \dots < D_i < \dots < D_n,$$

то відношення переваги на безлічі приладів G_i для визначення обсервованого місця судна виражається такою впорядкованою послідовністю:

$$G_1 > G_2 > \dots > G_i > \dots > G_n.$$

Дотримуючись цього відношення переваги, можливість P_i отримання обсервації з точністю D_i з урахуванням надійності приладів системи обсервації визначається наступними виразами з точністю:

$$\begin{aligned} P_1 &= K_{\Gamma 1}, \\ P_2 &= K_{\Gamma 2}(1 - K_{\Gamma 1}) \\ P_3 &= K_{\Gamma 3}(1 - K_{\Gamma 1})(1 - K_{\Gamma 2}) \\ &\dots\dots\dots \\ P_i &= K_{\Gamma i} \prod_{j=1}^{i-1} (1 - K_{\Gamma j}), \end{aligned}$$

.....

$$P_n = K_{\Gamma n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - K_{\Gamma j}).$$

У цьому випадку дисперсія модуля векторіальної похибки обсервації D_χ набуває вигляду:

$$D_\chi = \sum_i^n [D_i K_{\Gamma i} \prod_{j=1}^{i-1} (1 - K_{\Gamma j})], \quad (13)$$

де $K_{\Gamma i}$ – коефіцієнт готовності i -го приладу системи обсервації.

Аналогічно можна отримати вираз дисперсії модуля векторіальної похибки прогнозу D_θ :

$$D_\theta = \sum_i^m [\tilde{D}_i \tilde{K}_{\Gamma i} \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \tilde{K}_{\Gamma j})], \quad (14)$$

де m – кількість способів прогнозу збільшення координат судна за інтервал часу Δt з урахуванням приладів прогнозу параметрів руху судна;

$\tilde{D}_i$ – дисперсія модуля векторіальної похибки прогнозу при i -му способі прогнозу;

$\tilde{K}_{\Gamma i}$ – коефіцієнт готовності приладів, що забезпечують i -й спосіб прогнозу.

Прогноз руху судна може здійснюватися за допомогою лага і курсовказівника, причому на судні, крім магнітного компаса, є один або кілька гірокомпасів, або інерційною навігаційною системою. Як прилад прогнозу може бути використана GPS, якщо використовувати інформацію про шляховий кут та шляхову швидкість.

Ще одним важливим аспектом, що характеризує точність утримання судна на програмній траєкторії, є детермінована складова, яка викликана нищпоренням судна щодо заданої траєкторії руху. Детерміновану складову показника ефективності функціонування системи S_m доцільно характеризувати

максимальним значенням бічного зміщення (знесення) судна $d_{\max}$ відносно його програмної траєкторії руху.

Тому у якості показника Q_{Σ} , що враховує як стохастичну, так і детерміновану складові пропонується сума їх характеристик:

$$Q_{\Sigma} = Q_s + d_{\max}$$

або

$$Q_{\Sigma} = D_{\chi} + D_{\theta} + fD_{\xi} + d_{\max}.$$

Так як вирази для дисперсій D_{χ} та D_{θ} отримані у явному вигляді (13) і (14), то надалі слід отримати аналітичні вирази для дисперсії D_{ξ} та бічного зносу судна $d_{\max}$.

Вираз дисперсії D_{ξ} модуля векторіальної похибки повороту ξ може бути отримано наступним чином. При виконанні повороту судном векторіальна похибка керування судном $S^{(c)}$ є сумою векторіальної похибки $S^{(\beta)}$, яка виникає через похибку перекладки пера руля $\Delta\beta_k$, і векторіальної похибки $S^{(t)}$, що виникає через похибку вибору моменту часу початку повороту Δt_n .

Відповідно роботі [557], розглянемо векторіальну похибку $S^{(\beta)}$, для чого звернемося до рис. 4. Якщо кладка руля робиться без похибки, то після повороту судно опиниться в точці М на новій ділянці траєкторії, і векторіальна похибка $S^{(\beta)}$ не виникає. У разі появи похибки $\Delta\beta_k$ дійсний кут кладки руля становить величину $\beta_k + \Delta\beta_k$, а судно до кінця маневру виявляється в точці N. При цьому векторіальна похибка $S^{(\beta)}$ дорівнює за величиною відрізка MN, причому її складові $S_x^{(\beta)}$ і $S_y^{(\beta)}$ визначаються виразами:

$$S_x^{(\beta)} = x_N - x_M \quad \text{і} \quad S_y^{(\beta)} = y_N - y_M, \quad (15)$$

де x_M і y_M – координати точки М;

x_N і y_N – координати точки N.

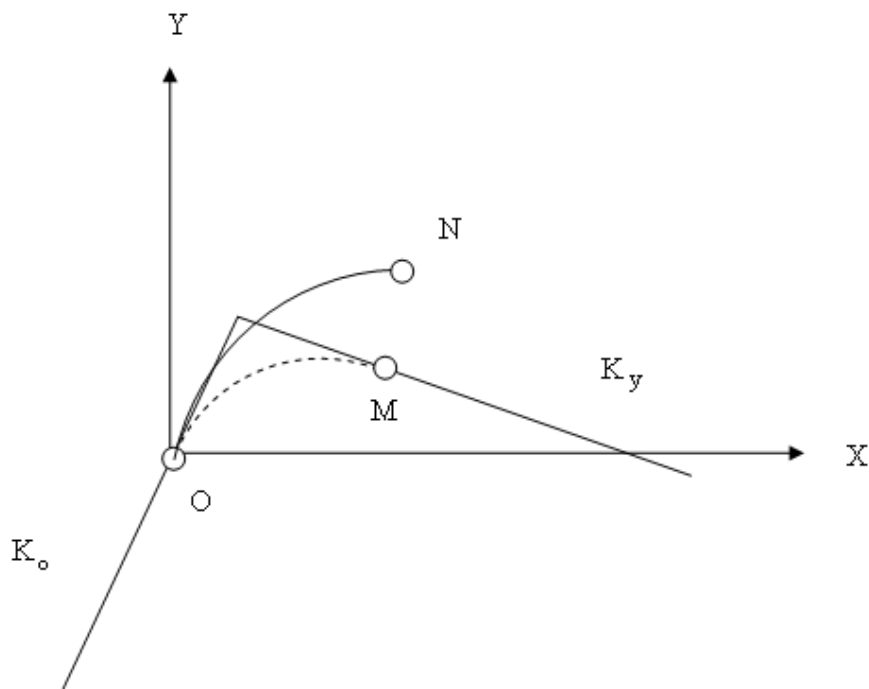


Рисунок 4. Виникнення векторіальної похибки $S^{(\beta)}$

Якщо обертальний рух судна відбувається з постійною кутовою швидкістю, то воно характеризується рівнянням:

$$\dot{K} = k_{\omega} \beta_k ,$$

де k_{ω} – коефіцієнт ефективності руля.

У цьому випадку курс судна змінюється відповідно до виразу:

$$K = K_o + k_{\omega} \beta_k t ,$$

причому тривалість τ повороту судна:

$$\tau = \Delta K / k_{\omega} \beta_k ,$$

де $\Delta K = K_y - K_o$.

Знайдемо координати точки М, які, очевидно, можна знайти з виразів:

$$\begin{aligned} x_M &= \int_0^\tau V_o \sin[K_o + a_\omega t] dt = V_o \sin K_o \int_0^\tau \cos(a_\omega t) dt + V_o \cos K_o \times \\ &\quad \times \int_0^\tau \sin(a_\omega t) dt, \\ y_M &= \int_0^\tau V_o \cos(K_o + a_\omega t) dt = V_o \cos K_o \int_0^\tau \cos(a_\omega t) dt - V_o \sin K_o \times \\ &\quad \times \int_0^\tau \sin(a_\omega t) dt, \end{aligned}$$

де $a_\omega = k_\omega \beta_k$.

Зазначаємо, що у попередніх виразах інтеграли дорівнюють:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \sin(a_\omega t) dt &= -\frac{1}{a_\omega} \cos a_\omega t \Big|_0^\tau = -\frac{1}{a_\omega} [\cos a_\omega \tau - 1], \\ \int_0^\tau \cos(a_\omega t) dt &= \frac{1}{a_\omega} \sin a_\omega t \Big|_0^\tau = \frac{1}{a_\omega} \sin a_\omega \tau. \end{aligned}$$

Враховуємо, що $a_\omega \tau = \Delta K$ і $K_o + \Delta K = K_y$, тому вирази для координат x_M та y_M набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{V_o}{k_\omega \beta_k} (\cos K_o - \cos K_y), \\ y_M &= \frac{V_o}{k_\omega \beta_k} (\sin K_y - \sin K_o). \end{aligned}$$

Таким же чином виражаються координати x_N та y_N точки N:

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{V_o}{k_\omega (\beta_k + \Delta \beta_k)} (\cos K_o - \cos K_y), \\ y_N &= \frac{V_o}{k_\omega (\beta_k + \Delta \beta_k)} (\sin K_y - \sin K_o). \end{aligned}$$

Складові $S_x^{(\beta)}$ та $S_y^{(\beta)}$ векторіальної похибки згідно (15):

$$S_x^{(\beta)} = \frac{V_o}{k_\omega} (\cos K_o - \cos K_y) \left[\frac{1}{(\beta_k + \Delta\beta_k)} - \frac{1}{\beta_k} \right],$$

$$S_y^{(\beta)} = \frac{V_o}{k_\omega} (\sin K_y - \sin K_o) \left[\frac{1}{(\beta_k + \Delta\beta_k)} - \frac{1}{\beta_k} \right].$$

Якщо врахувати, що $\beta_k \gg \Delta\beta_k$, то справедливі рівності:

$$S_x^{(\beta)} = \frac{-V_o}{k_\omega \beta_k^2} (\cos K_o - \cos K_y) \Delta\beta_k,$$

$$S_y^{(\beta)} = \frac{-V_o}{k_\omega \beta_k^2} (\sin K_y - \sin K_o) \Delta\beta_k. \quad (16)$$

Таким чином, отримана залежність векторіальної похибки $S^{(\beta)}$ від похибки кладки руля $\Delta\beta_k$.

На рис. 5 показана векторіальна похибка $S^{(t)}$, яка викликана похибкою визначення моменту часу початку повороту Δt_n .

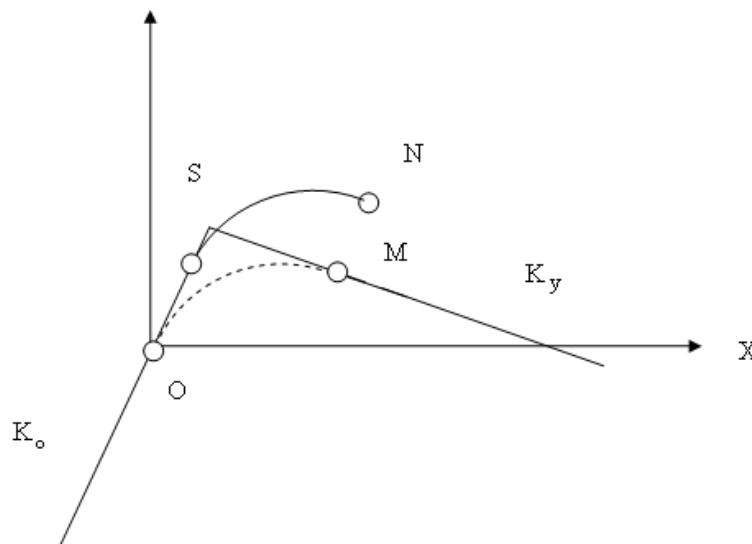


Рисунок 5. Формування векторіальної похибки $S^{(t)}$

Аналіз рис. 5 показує, що векторіальна похибка $S^{(t)}$ виражається відрізком MN, рівного за величиною відрізка OS, що дозволяє записати:

$$S^{(t)} = OS = V_o \Delta t_n.$$

Очевидно, проекції $S_x^{(t)}$ та $S_y^{(t)}$ векторіальної похибки $S^{(t)}$ мають вигляд:

$$S_x^{(t)} = V_o \sin K_o \Delta t_n, \quad S_y^{(t)} = V_o \cos K_o \Delta t_n. \quad (17)$$

Позначимо дисперсії центрованих випадкових величин $\Delta \beta_k$ і Δt_n відповідно через D_β і D_t . Очевидно, що коваріаційна матриця векторіальної похибки $S^{(\beta)}$ за відсутності кореляції між складовими набуває такого вигляду:

$$K_\beta^S(x,y) = \begin{vmatrix} D_{\beta x}^S & 0 \\ 0 & D_{\beta y}^S \end{vmatrix},$$

Дисперсії складових $D_{\beta x}^S$ та $D_{\beta y}^S$ з урахуванням виразів (16):

$$D_{\beta x}^S = \left[\frac{V_o}{k_\omega \beta_k^2} (\cos K_o - \cos K_y) \right]^2 D_\beta;$$

$$D_{\beta y}^S = \left[\frac{V_o}{k_\omega \beta_k^2} (\sin K_y - \sin K_o) \right]^2 D_\beta.$$

Аналогічно, коваріаційна матриця $K_t^S(x,y)$ векторіальної похибки $S^{(t)}$, при її незалежних складових, має такий вигляд:

$$K_t^S(x,y) = \begin{vmatrix} D_{tx}^S & 0 \\ 0 & D_{ty}^S \end{vmatrix}.$$

З урахуванням співвідношень (17) дисперсії складових D_{tx}^S та D_{ty}^S похибки $S^{(t)}$ визначаються виразами:

$$D_{tx}^S = (V_o \sin K_o)^2 D_t;$$

$$D_{ty}^S = (V_o \cos K_o)^2 D_t.$$

Векторіальні похибки $S^{(\beta)}$ і $S^{(t)}$ є незалежними, та їх сума, тобто векторіальна похибка повороту ξ , характеризується коваріаційною матрицею $K_c^S(x,y)$, яка є сумою коваріаційних матриць доданків векторіальних похибок [555]:

$$K_c^S(x,y) = K_\beta^S(x,y) + K_t^S(x,y), \text{ або}$$

$$K_c^S(x,y) = \begin{bmatrix} D_{\beta x}^S + D_{tx}^S & 0 \\ 0 & D_{\beta y}^S + D_{ty}^S \end{bmatrix}.$$

Виходячи з коваріаційної матриці $K_c^S(x,y)$, можна записати вираз дисперсії D_ξ модуля векторіальної похибки повороту ξ :

$$D_\xi = D_{\beta x}^S + D_{tx}^S + D_{\beta y}^S + D_{ty}^S,$$

або

$$D_\xi = D_\beta \left\{ \left[\frac{V_o}{k_\omega \beta_k^2} (\cos K_o - \cos K_y) \right]^2 + \left[\frac{V_o}{k_\omega \beta_k^2} (\sin K_y - \sin K_o) \right]^2 \right\} + D_t V_o^2.$$

Вираз дисперсії D_ξ можна записати у такому вигляді:

$$D_\xi = D_\beta \left(\frac{V_o}{k_\omega \beta_k^2} \right)^2 [\cos^2 K_o - 2 \cos K_o \cos K_y + \cos^2 K_y + \\ + \sin^2 K_y - 2 \sin K_y \sin K_o + \sin^2 K_o] + D_t V_o^2,$$

або остаточно:

$$D_{\xi} = 2D_{\beta}(\frac{V_o}{k_{\omega}\beta_k^2})^2[1 - \cos(K_o - K_y)] + D_t V_o^2. \quad (18)$$

Таким чином, векторіальна похибка ξ повороту судна є сумою незалежних векторіальних похибок $S^{(\beta)}$ і $S^{(t)}$, що виникають через неточності в перекладці пера руля і вибору моменту часу початку повороту судна.

Коваріаційна матриця векторіальної похибки управління судном є сумою коваріаційних матриць похибок $S^{(\beta)}$ і $S^{(t)}$, а дисперсії D_{ξ} формалізована виразом (18).

При виконанні повороту судном векторіальна похибка відносно прогнозованої точки виходу судна на новий курс також може з'явитися при виборі моменту часу початку повороту t_n для того, щоб після повороту опинитися в прогнозованій точці, проводиться з урахуванням динамічної моделі повороткості судна. Прогнозована траєкторія, яка визначається динамічною моделлю повороткості судна, відрізняється від його реальної траєкторії, що веде до виникнення похибки Δt_n у визначенні моменту часу початку повороту судна t_n і, отже, до появи систематичної складової векторіальної похибки керування $S^{(d)}$. Розглянемо механізм появи систематичної векторіальної похибки $S^{(d)}$, для цього звернемося до рис. 6.

Виходячи з обраної динамічної моделі повороткості судна, розраховується момент часу початку повороту t_n , якому відповідає точка С на програмній траєкторії руху і прогнозована перехідна траєкторія руху показана пунктирною лінією. Для реальної траєкторії руху поворот необхідно починати в момент часу $\tilde{t}_n$, якому відповідає точка В.

Починаючи поворот у розрахований момент часу t_n , судно опиниться в точці N замість точки М. Очевидно, що систематична векторіальна похибка $S^{(d)}$ дорівнює за величиною відстані між точками М і N, тобто відрізку MN. У свою чергу, з рисунка видно, що відрізки MN та ВС рівні між собою і, отже, систематична векторна похибка $S^{(d)}$ дорівнює відрізку ВС, тобто $S^{(d)} = BC$.

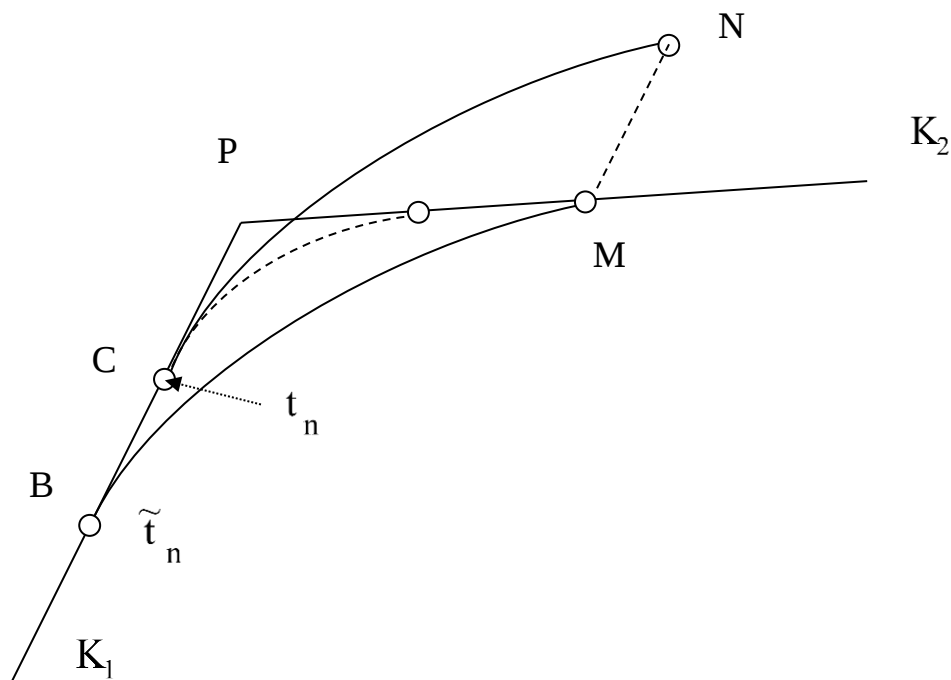


Рисунок 6. Виникнення систематичної векторіальної похибки $S^{(d)}$

Як впливає з рис. 6 величина відрізка BC залежить від швидкості судна V_o та інтервалу часу $t_n - \tilde{t}_n$. Тому систематична векторіальна похибка $S^{(d)}$ дорівнює:

$$S^{(d)} = V_o \text{Abs}(t_n - \tilde{t}_n),$$

з проекціями $S_x^{(d)}$ та $S_y^{(d)}$:

$$S_x^{(d)} = V_o \text{Abs}(t_n - \tilde{t}_n) \sin K_1,$$

$$S_y^{(d)} = V_o \text{Abs}(t_n - \tilde{t}_n) \cos K_1.$$

Отже, підвищення точності керування судном можливе мінімізацією коваріційної матриці векторіальної похибки повороту, що вимагає максимального зниження похибки перекладки пера руля та похибки вибору

моменту часу початку повороту, а також зниженням систематичної векторіальної похибки $S^{(d)}$ шляхом вибору найбільш адекватної динамічної моделі поворотності судна для розрахунку моменту початку повороту t_n .

Таким чином, зниження втрат пройденої відстані через вплив траєкторної похибки можливе такими заходами:

1. Мінімізацією дисперсії модуля похибки обсервації D_χ за рахунок збільшення ефективності обсервованих координат судна або використанням надлишкових ліній положення.

2. Зниженням систематичної векторіальної похибки повороту $S^{(d)}$ шляхом вибору найбільш адекватної динамічної моделі поворотності судна для розрахунку моменту початку повороту t_n .

3. Підвищення експлуатаційної надійності системи навігаційної інформації, що визначає ймовірність отримання навігаційних параметрів.

Останній пункт актуальний для заводів-виробників навігаційної апаратури, тому для дослідження становлять інтерес пункти, що залишилися.

Розглянемо складову втрати пройденої відстані ΔS , коли судно для виконання маневру розходження відхиляється від програмної траєкторії руху і потім повертається на неї після закінчення маневру.

Розглянемо алгоритм вибору оптимального маневру розходження з безлічі допустимих маневрів U , при якому досягається мінімальне значення критерію оптимальності ΔS , що виникають внаслідок розходження.

Враховуючи, що маневр розходження завершується виходом судна на програмну траєкторію руху, можна обчислити фактичну довжину частини програмної траєкторії S_m , яку пройшло судно протягом маневру розходження, і відстань S , яке судно пройшло б по програмній траєкторії без маневрування. Різниця $\Delta S = S_m - S$ є втратою пройденої відстані, і її приймаємо як критерій оптимальності, що характеризує економічність маневру.

Знайдемо залежність величини ΔS від параметрів маневру розходження t_y , K_y , t_b та K_b . Для цього звернемося до рис. 7, на якому наведено ілюстрацію

ситуації розходження в околиці програмного повороту, тобто. коли програмна траєкторія містить дві ділянки з курсами K_{01} та K_{02} . Очевидно, що:

$$S_m = V_o(\Delta t_b + \Delta t_k) \text{ і } S = S_a + dS,$$

де $\Delta t_b = t_b - t_y$, $\Delta t_k = t_k - t_b$ і $dS = \sqrt{(X_k - X_m)^2 + (Y_k - Y_m)^2}$.

Тоді отримаємо:

$$\Delta S = V_o(\Delta t_b + \Delta t_k) - S_a - \sqrt{(X_k - X_m)^2 + (Y_k - Y_m)^2}.$$

Знайдемо вираз для координат X_k , Y_k і моменту часу t_k . Для цього запишемо рівняння другої ділянки програмної траєкторії як прямої, що проходить через точку з координатами X_m і Y_m :

$$(Y - Y_m) \sin K_{02} = (X - X_m) \cos K_{02}.$$

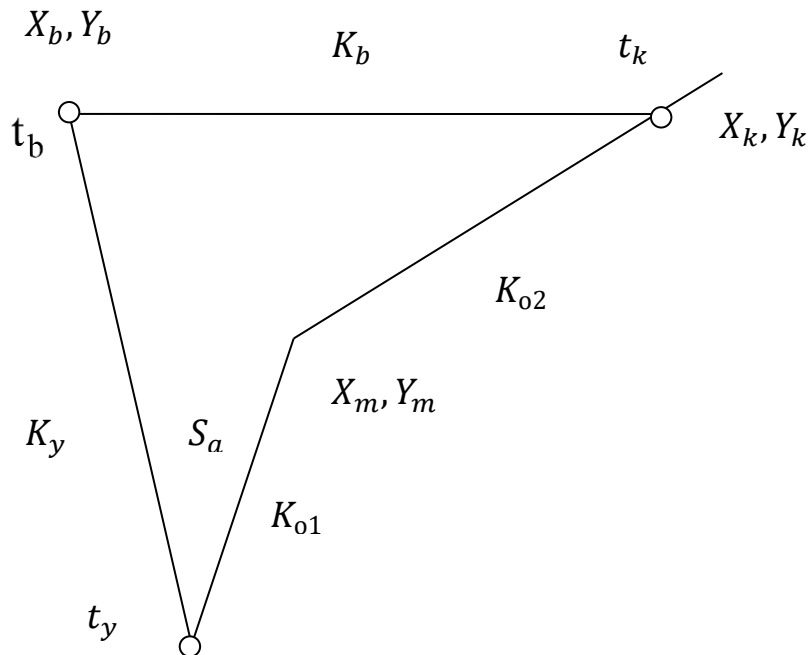


Рисунок 7. До виведення виразу для критерії оптимальності ΔS .

З іншого боку, поточні значення координат судна на ділянці виходу на програмну траєкторію мають вигляд:

$$X = X_b + V_o t \sin K_b, \quad Y = Y_b + V_o t \cos K_b.$$

Оскільки точка (X_k, Y_k) одночасно належить обом прямим, то справедлива рівність:

$$(Y_b + V_o \Delta t_k \cos K_b - Y_m) \sin K_{o2} = (X_b + V_o \Delta t_k \sin K_b - X_m) \cos K_{o2},$$

з якого знаходимо вираз для Δt_k :

$$\Delta t_k = \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{o2} - (Y_b - Y_m) \sin K_{o2}]}{V_o \sin(K_{o2} - K_b)}.$$

При відомому значенні Δt_k нескладно знайти вирази для X_k і Y_k , які мають такий вигляд:

$$X_k = X_b + V_o \Delta t_k \sin K_b, \quad Y_k = Y_b + V_o \Delta t_k \cos K_b.$$

Підставляючи вирази для Δt_k , отримаємо:

$$X_k = X_b + \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{o2} - (Y_b - Y_m) \sin K_{o2}]}{\sin(K_{o2} - K_b)} \sin K_b,$$
$$Y_k = Y_b + \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{o2} - (Y_b - Y_m) \sin K_{o2}]}{\sin(K_{o2} - K_b)} \cos K_b.$$

Знаходимо вирази для збільшення координат $X_k - X_m$ та $Y_k - Y_m$, використовуючи отримані залежності:

$$\begin{aligned}
 X_k - X_m &= X_b - X_m + \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{02} - (Y_b - Y_m) \sin K_{02}]}{\sin(K_{02} - K_b)} \sin K_b = \\
 &= \frac{(X_b - X_m) \sin(K_{02} - K_b)}{\sin(K_{02} - K_b)} + \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{02} - (Y_b - Y_m) \sin K_{02}]}{\sin(K_{02} - K_b)} \sin K_b = \\
 &= \frac{\sin K_{02} [(X_b - X_m) \cos K_b - (Y_b - Y_m) \sin K_b]}{\sin(K_{02} - K_b)}
 \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо вираз для $Y_k - Y_m$:

$$\begin{aligned}
 Y_k - Y_m &= Y_b - Y_m + \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{02} - (Y_b - Y_m) \sin K_{02}]}{\sin(K_{02} - K_b)} \cos K_b = \\
 &= \frac{\cos K_{02} [(X_b - X_m) \cos K_b - (Y_b - Y_m) \sin K_b]}{\sin(K_{02} - K_b)}
 \end{aligned}$$

Знайдемо вираз:

$$\sqrt{(X_k - X_m)^2 + (Y_k - Y_m)^2} = \frac{(X_b - X_m) \cos K_b - (Y_b - Y_m) \sin K_b}{\sin(K_{02} - K_b)}$$

яке підставляємо в ΔS та отримуємо:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= V_o \Delta t_b + \frac{[(X_b - X_m) \cos K_{02} - (Y_b - Y_m) \sin K_{02}]}{\sin(K_{02} - K_b)} - S_a - \\
 &\quad - \frac{(X_b - X_m) \cos K_b - (Y_b - Y_m) \sin K_b}{\sin(K_{02} - K_b)}
 \end{aligned}$$

Очевидно, що значення координат X_b і Y_b визначаються формулами $X_b = V_o \Delta t_b \sin K_y$ і $Y_b = V_o \Delta t_b \cos K_y$, з урахуванням яких останній вираз набуває вигляду:

$$\Delta S = V_o \Delta t_b - S_a + \frac{V_o \Delta t_b [\sin K_y (\cos K_{02} - \cos K_b) - \cos K_y (\sin K_{02} - \sin K_b)]}{\sin(K_{02} - K_b)} +$$

$$+ \frac{Y_m(\sin K_{o2} - \sin K_b) - X_m(\cos K_{o2} - \cos K_b)}{\sin(K_{o2}-K_b)}$$

Перший доданок отриманого виразу множимо і ділимо на $\sin(K_{o2}-K_b)$ і після перетворення остаточно знаходимо:

$$\Delta S = \frac{V_o \Delta t_b [\sin(K_{o2}-K_b) + \sin(K_b-K_y) + \sin(K_y-K_{o2})]}{\sin(K_{o2}-K_b)} + \\ + \frac{Y_m(\sin K_{o2} - \sin K_b) - X_m(\cos K_{o2} - \cos K_b)}{\sin(K_{o2}-K_b)} - S_a$$

Очевидно, у випадку програмної траєкторії, що має одну ділянку з курсом K_o , величина ΔS визначається наступним виразом:

$$\Delta S = \frac{V_o(t_b-t_y)[\sin(K_o-K_b)+\sin(K_b-K_y)+\sin(K_y-K_o)]}{\sin(K_o-K_b)}, \quad (19)$$

так як $S_a = 0$.

Отримавши залежність критерію оптимальності ΔS від параметрів маневру розходження t_y , K_y , t_b і K_b , необхідно знайти процедуру обчислення їх оптимальних значень, які обертають мінімум втрати пройденої відстані ΔS . Для подальшого розгляду припустимо, що існує допустима безліч маневрів розходження з відомими граничними значеннями параметрів t_{y*} , t_y^* , K_{y*} , K_y^* , t_{b*} , t_b^* , K_{b*} , K_b^* . Особливістю розглянутої оптимізаційної задачі є залежність граничних значень K_{y*} , K_y^* , t_{b*} і t_b^* від величин параметрів t_y , K_y і K_b , причому K_{y*} залежить тільки від поточного значення t_y , тоді як t_{b*} залежить від усіх трьох параметрів t_y , K_y і K_b .

Тому доцільно вчинити в такий спосіб. Необхідно дослідити поведінку критерію оптимальності ΔS за допомогою приватних похідних за параметрами маневру розходження, причому знаходити оптимальне значення одного з

параметрів та модифікувати критерій оптимальності, зменшуючи його розмірність на одиницю шляхом виключення оптимального параметра. Доцільно спочатку зробити зазначену процедуру з параметром t_b , оскільки його граничні значення є функцією найбільшого числа параметрів.

Знайдемо приватну похідну $\frac{\partial \Delta S}{\partial t_b}$. Очевидно, що незалежно від числа ділянок програмної траєкторії, справедливим є вираз:

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial t_b} = \frac{V_o[\sin(K_o-K_b)+\sin(K_b-K_y)+\sin(K_y-K_o)]}{\sin(K_o-K_b)}.$$

Позначимо $\gamma_b = K_o-K_b$ та $\gamma_y = K_y-K_o$. Тоді вираз для похідної набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta S}{\partial t_b} &= \frac{V_o[\sin(K_o-K_b) + \sin(K_b-K_y) - \sin(K_y-K_o)]}{\sin(K_o-K_b)} = \\ &= V_o\left[1 + \frac{\sin(K_b-K_y)+\sin(K_y-K_o)}{\sin(K_o-K_b)}\right], \\ &\text{або} \\ \frac{\partial \Delta S}{\partial t_b} &= V_o\left[1 + \frac{-\sin(\gamma_b + \gamma_y) + \sin \gamma_y}{\sin \gamma_b}\right] = \\ &= V_o\left[1 + \frac{\sin \gamma_y - \sin \gamma_y \cos \gamma_b - \cos \gamma_y \sin \gamma_b}{\sin \gamma_b}\right] = \\ &= V_o\left[1 + \frac{\sin \gamma_y(1-\cos \gamma_b) - \cos \gamma_y \sin \gamma_b}{\sin \gamma_b}\right] = V_o\left[1 + \sin \gamma_y \frac{(1-\cos \gamma_b)}{\sin \gamma_b} - \cos \gamma_y\right]. \end{aligned}$$

Враховуємо, що $\sin \gamma_b = 2 \sin \frac{\gamma_b}{2} \cos \frac{\gamma_b}{2}$ і $1 - \cos \gamma_b = 2 \sin^2 \frac{\gamma_b}{2}$, тому:

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial t_b} = V_o\left[1 + \sin \gamma_y \operatorname{tg} \frac{\gamma_b}{2} - \cos \gamma_y\right].$$

Звертаємо увагу на ту обставину, що добуток $\sin \gamma_y \operatorname{tg} \frac{\gamma_b}{2} \geq 0$ для всіх допустимих значень $\gamma_y \leq \pi$ і $\gamma_b \leq \pi$, а також $1 - \cos \gamma_y \geq 0$. Отже, $\frac{\partial \Delta S}{\partial t_b} \geq 0$ незалежно від значень параметрів розходження. Це означає, що мінімум ΔS досягається при $t_b = t_{b*}$

Тому, підставляючи у вираз (19) для ΔS аналітичну залежність, якою виражається t_{b*} , зробимо модифікацію критерію оптимальності ΔS , виключаючи змінну t_b , і цим знижуючи його розмірність на одиницю, тобто $\Delta S_1 = \Delta S(t_{b*})$, причому $\Delta S_1 = f(t_y, K_y, K_b)$.

Враховуємо, що:

$$t_{b*} = t_y + \frac{\Delta_b D_d + D_n \sin(\alpha_n - K_{otb}) + V_{otn} t_y \sin(K_{otb} - K_{otn})}{V_{oty} \sin(K_{oty} - K_{otb})}.$$

Тому для стандартного маневру розходження у випадку однієї ділянки програмної траєкторії отримаємо:

$$\Delta S_1 = \frac{V_o(t_{b*} - t_y)[\sin(K_o - K_b) + \sin(K_b - K_y) + \sin(K_y - K_o)]}{\sin(K_o - K_b)}, \quad (20)$$

або після підстановки виразу для t_{b*} :

$$\Delta S_1 = G_1 \frac{V_o[\sin(K_o - K_b) + \sin(K_b - K_y) + \sin(K_y - K_o)]}{\sin(K_o - K_b)},$$

$$\text{де } G_1 = \frac{\Delta_b D_d + D_n \sin(\alpha_n - K_{otb}) + V_{otn} t_y \sin(K_{otb} - K_{otn})}{V_{oty} \sin(K_{oty} - K_{otb})}.$$

Значення курсу виходу K_b є фіксованою величиною і визначається лише програмним курсом K_o , тобто $K_b = K_o - 30\delta$, де $\delta = 1$, при істинному ухиленні судна вправо і $\delta = -1$ при ухиленні вліво. Тому модифікований критерій

оптимальності ΔS_1 залежить лише від часу t_y та курсу K_y ухилення, тобто $\Delta S_1 = f(t_y, K_y)$.

Аналіз приватної похідної критерію оптимальності ΔS_1 за параметром K_y , показав, що знак похідної $\frac{\partial \Delta S_1}{\partial K_y}$ збігається зі знаком виразу $\sin(K_o - K_b)$ який, у свою чергу, визначається знаком характеристики істинного ухилення судна δ . Тому знак приватної похідної $\frac{\partial \Delta S_1}{\partial K_y}$ співпадає зі знаком δ . Це означає, що мінімум критеріїв оптимальності ΔS_1 і ΔS досягається на нижній межі курсу ухилення K_{y*} .

Цей висновок підтверджується рис. 8, з якого випливає, що довжина траєкторії маневру розходження ОАВ з курсом ухилення K_{y*} є мінімальною порівняно з іншими траєкторіями, наприклад, траєкторії ОСВ з курсом ухилення K_y .

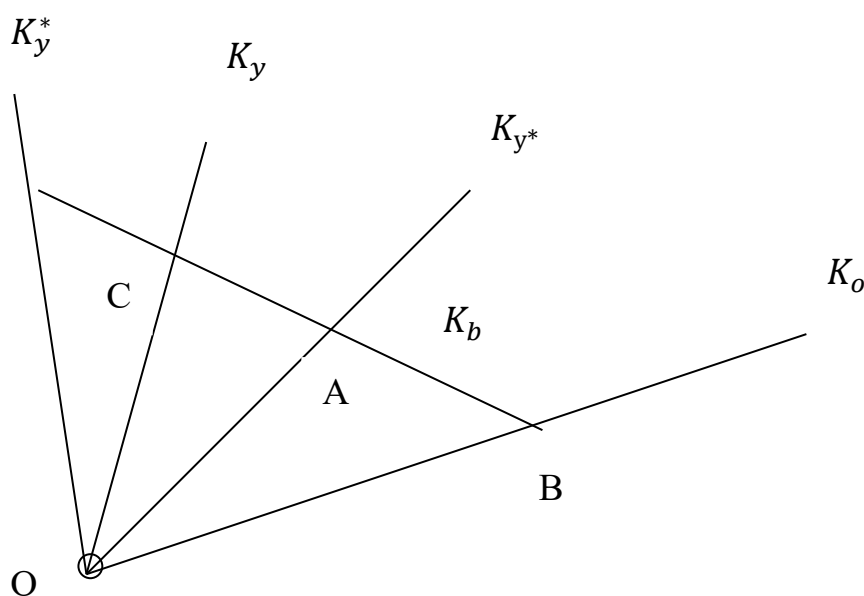


Рисунок 8. Мінімальна траєкторія

Вибір оптимального значення часу ухилення t_y визначається наступною обставиною. Очевидно, що нижня межа курсу ухилення K_{y*} є функцією часу ухилення t_y , що росте, як показано на рис. 9.

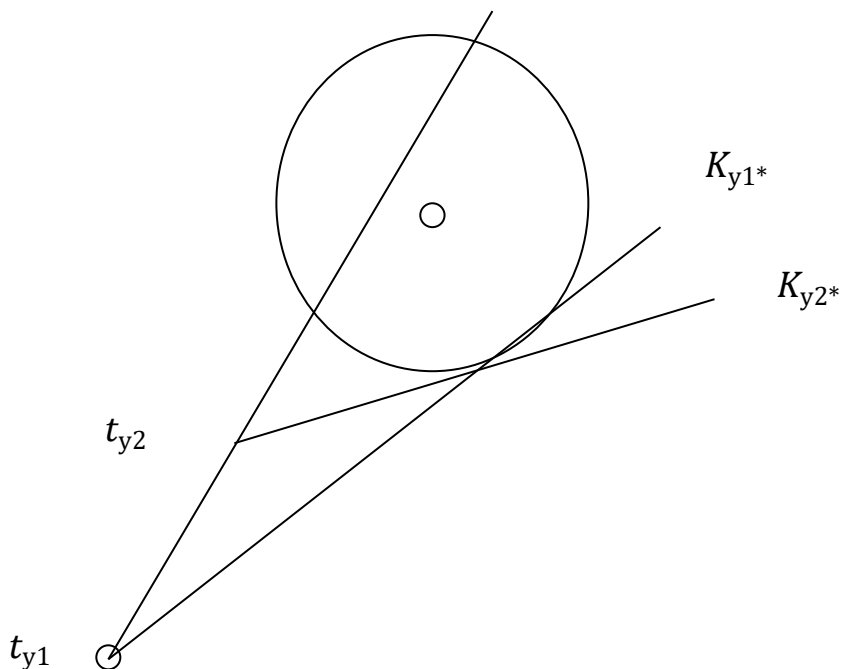


Рисунок 9. Залежність K_{y*} від t_y

Отже, найменше значення K_{y*} досягається на нижній межі часу ухилення t_{y*} , що забезпечує мінімальне значення ΔS по всіх параметрах маневру розходження.

Таким чином, оптимальними параметрами маневру розходження є нижня межа часу ухилення t_{y*} заданий курсу виходу K_b , за якими обчислюються нижні межі курсу ухилення K_{y*} та часу виходу t_{b*} .

Мінімізація втрат пройденої відстані досягається вибором оптимального маневру розходження, мінімізацією дисперсії модуля похибки обсервації D_χ та вибором адекватної динамічної моделі поворотності судна.