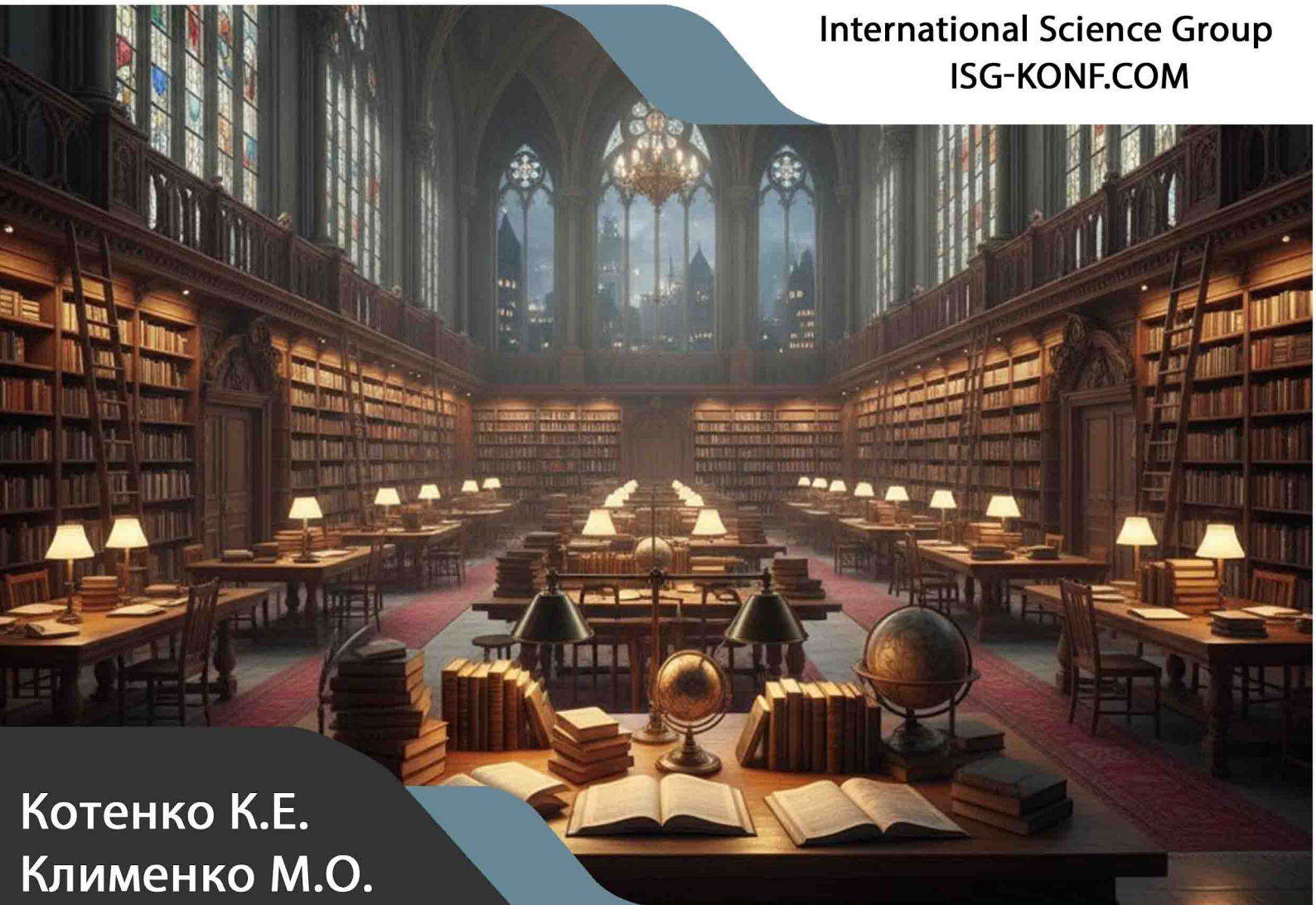




International Science Group
ISG-KONF.COM



Котенко К.Е.
Клименко М.О.

АСПЕКТИ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТОНКОСТІННИХ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНКОВИХ СТРУКТУР

ISBN 979-8-90214-597-4

DOI 10.46299/979-8-90214-597-4

Котенко К.Е., Клименко М.О.

**АСПЕКТИ ДИНАМІЧНОЇ
ПОВЕДІНКИ ТОНКОСТІННИХ
ШАРУВАТИХ ОБОЛОНКОВИХ
СТРУКТУР**

Monograph

2025

UDC 653

Authors:

Котенко К.Е., Клименко М.О.

Reviewers:

Гайдайчук В.В. – д.т.н., професор

Почка К.І. – д.т.н., професор

Котенко К.Е., Клименко М.О. Аспекти динамічної поведінки тонкостінних шаруватих оболонкових структур. Monograph. – Primedia eLaunch, Boston, USA, 2025. – 130 p.

Рекомендовано до видання Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури. Протокол засідання №37 від 30 жовтня 2025 р.

Library of Congress Cataloging-in-Publication

ISBN – 979-8-90214-597-4

DOI – 10.46299/979-8-90214-597-4

У монографії розглядаються наукові питання, пов'язані з вивченням динамічних процесів, тонкостінних шаруватих оболонкових структур різних канонічних форм, з метою визначення міцності, довговічності та працездатності елементів у різних конструкціях. Побудовано різні скінченно-елементні моделі таких оболонок. Представлені дослідження характеризують динамічну поведінку тришарових оболонок зі специфічними конструктивними особливостями. Результати досліджень, отримані методом скінченних елементів, можуть бути застосовані для конструкторських розробок у різних галузях техніки. Монографія також буде придатною для використання фахівцями в галузі авіації, ракетної техніки, машинобудування, суднобудування та атомної енергетики.

UDC 653

ISBN – 979-8-90214-597-4

© Котенко К.Е., Клименко М.О.

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Основні поняття і гіпотези оболонкових структур	6
1.1. Існуючі гіпотези визначення напружено-деформованого стану оболонкових структур	6
1.2. Дослідження коливальних процесів оболонкових структур	11
2. Динамічна поведінка несиметричних оболонок різної форми з неоднорідним заповнювачем	16
2.1. Залежності деформацій, зусиль та моментів	16
2.2. Деформації і коливання елементів тришарової циліндричної оболонки.....	18
2.3. Розрахункові рівняння динаміки тришарових кінцевих оболонкових структур при нестационарних навантаженнях	24
2.4. Особливості розрахунків тришарових сферичних структур	28
3. Використання методу скінченних елементів в задачах динаміки шаруватих оболонкових структур	34
3.1. Чисельні методи роз'язування задач динаміки	34
3.2. Основні співвідношення методу скінченних елементів	35
3.3. Реалізація методу скінченних елементів в Nastran	44
4. Лінійний динамічний аналіз перехідних процесів тришарових оболонкових структур	47
4.1. Дослідження динаміки тришарових оболонкових структур	47
4.2. Постановка і розв'язування задач динаміки тришарових циліндричних оболонкових структур	48
4.3. Задачі динаміки тришарових кінцевих оболонкових структур ...	58
4.4. Моделювання динамічних процесів півсферичних тришарових оболонкових структур	68
5. Дослідження впливу дефектів на динамічні характеристики шаруватих оболонкових структур канонічної форми	80
5.1. Аналіз впливу дефектів у тришарових циліндричних оболонках	80
5.2. Вплив дефектів на динамічні характеристики шаруватих кінцевих оболонкових структур	97
5.3. Особливості впливу колових розривів на динамічну поведінку тришарових півсферичних структур	105
Вдячність авторів	118
Література	119

Вступ

Дослідження і експлуатація шаруватих оболонок, що спостерігаються на протязі останніх років свідчать про значне зростання об'ємів використання таких структур у різних галузях техніки у т. ч. машино- і літакобудуванні, атомній і нафтогазовій промисловості, в цивільному будівництві, прикладній механіці та інших галузях. В цьому зв'язку досить актуальною стала проблема забезпечення надійності об'єктів і конструкцій, що включають елементи і деталі шаруватих оболонок. Особливо важливу роль в цьому відношенні набули результати наукових досліджень, що характеризують вплив експлуатаційних і природних факторів на стійкість шаруватих структур до динамічних впливів. Дослідження Г. Кіргофа, А. Лява, С. П. Тимошенко, Е. Рейснера та інших вчених стали фундаментальною основою вирішення багатьох аспектів даної проблеми. Нові запити останнього часу викликали необхідність вдосконалення теоретичної сторони досліджень, визначення і врахування динамічної стійкості оболонкових структур при нестационарних навантаженнях таких конструкцій. Математичне моделювання деформаційних і коливальних процесів при розрахунках напружено-деформованого стану таких структур дозволяє відносно просто вирішувати ці задачі при однакових параметрах їх геометричних і фізико-механічних характеристик і коли параметри цих характеристик є відносно незначними. А при значній різниці цих параметрів, що особливо характерно для тонкостінних оболонкових структур, потребує використання незалежних гіпотез до кожного шару структури. Такий підхід передбачає використання гіпотез зсувної теорії С. П. Тимошенко. Крім параметрів фізико-механічних властивостей матеріалу шаруватого пакету оболонкової структури, при аналогічних величинах останніх, специфічний вплив на динаміку таких структур можуть викликати геометричні зміни елементів шарового пакету, а при їх незмінності сама форма оболонкової структури (канонічна або інша). Дослідження впливу останнього фактора, представляється важливим, особливо у практичному відношенні.

Досить важливим являється і вдосконалення чисельних розрахунків динаміки оболонкових структур, працюючих в умовах нестационарного імпульсного динамічного навантаження.

В цьому відношенні *метою даної роботи* є визначення впливу конструктивних особливостей і параметрів фізико-механічних характеристик циліндричних, конічних та сферичних тонкостінних тришарових оболонкових структур різної форми поперечного перерізу на напружено - деформований стан неоднорідних елементів дискретно – підкріплених оболонок.

Зміст монографії побудований наступним чином: у першому розділі на основі класичних і сучасних літературних матеріалів виконано огляд і аналіз досліджень, характеризуючих становлення, розвиток і вдосконалення теорії оболонкових структур, зокрема визначення факторів впливу на їх динамічну поведінку при нестационарних навантаженнях. Установлена своєрідність досліджень для оцінки динаміки тонкостінних оболонкових структур.

В другому розділі з використанням зсувної теорії С.П. Тимошенко і варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона-Остроградського отримано системи гіперболічних рівнянь руху тришарового елемента оболонок різної форми при осесиметричному імпульсному навантаженні структур.

У третьому розділі наведені чисельні методи розрахунків деформованого стану досліджуваних структур, які дозволяють розв'язувати конкретні математичні задачі, враховуючи всі дані при їх постановці.

В четвертому розділі наведені дослідження демонструють характер і ступень впливу геометричних і фізичних властивостей конструкційних елементів шаруватого пакету тонкостінних оболонкових структур. Показано, що змінюючи матеріал шаруватого пакету оболонки, товщину несучих шарів і пружність заповнювача можна підібрати конструкцію структури з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні.

П'ятий розділ монографії ілюструє вплив структурних особливостей і технологічних дефектів, що по-різному впливають на їх характеристики напружено-деформованого стану і величини власних частот.

1. Основні поняття і гіпотези оболонкових структур

Значний прогрес досягнутий останнім часом в машинобудуванні, атомній енергетиці, авіа-, ракето і суднобудуванні та інших галузях техніки став результатом виконання ряду підходів серед яких особливе місце належить використанню в конструкціях машин, механізмів, будівельних та інших об'єктів елементів і деталей оболонкових шаруватих структур. Особливо поширеним стало використання тонкостінних тришарових оболонкок симетричної і несиметричної форм, співвідношення товщини яких δ і мінімального радіусу кривизни поверхні оболонкової структури R не перевищує 5% [1-3]:

$$\frac{\delta}{R} \leq 0,05, \quad (1.1)$$

Несучі шари таких структур є, як правило, металевими, а міжшаровий заповнювач - полімерним (суцільним або дискретним). Така конструкція шарового пакету забезпечує значну міцність і жорсткість оболонкової структури та поглинання нею енергії (у т. ч. від зовнішніх динамічних впливів). Тому дослідження значимості впливу цієї особливості на динамічну поведінку оболонкової структури і можливість її регулювання, представляється важливим фактором створення і удосконалення теорії таких структур і розширення сфери їх використання.

Характер і послідовність робіт здійснюваних в цьому напрямку, наведені в наступних дослідженнях, включають дослідження НДС тонкостінних тришарових оболонкових структур циліндричної, конічної і сферичної форм.

1.1. Існуючі гіпотези визначення напружено-деформованого стану оболонкових структур

Наприкінці XIX сторіччя були здійснені перші успішні кроки і отримані позитивні результати в галузі створення теорії оболонкових шаруватих структур вченими А. Коші [4], Пуассоном [5] і незалежно від них Г. Кіргофом [6].

Основний підхід вирішення цієї проблеми автори вбачали в прийнятті гіпотез і створенні на їх основі розрахункових рівнянь, дозволяючих оцінювати напружено-деформований стан елементів композитної структури при її

силовому навантаженні. Розглядалися два варіанти вирішення проблеми. Перший включав визначення НДС по ступеню віддалення точок композитної пластини від її серединної поверхні, а інший – оснований на використанні гіпотези прямої недеформованої нормалі і знехтуванню нормальних напружень на площинах паралельних серединній поверхні. В подальшому останній, відомий як підхід Г. Кіргофа, був використаний А. Лявом [7,8] для оцінки НДС оболонкових структур, і після його уточнення останнім, отримав загальне визнання як «Теорія пластин і оболонок Кіргофа-Лява». Гіпотеза використання серединної поверхні пластин дозволила здійснити перехід в розрахунках від тривимірної до двовимірної задачі, а використання гіпотези недеформованості відрізка прямої до і після деформації оболонки і знехтування поперечними нормальними напруженнями, дозволили успішно вирішити низку практичних задач. Але цей підхід, розрахований на однорідність шаруватого пакету оболонкової структури і на відносно незначну різницю градієнтів напружено-деформованого стану її елементів при значних деформаціях структури і різних властивостях елементів шаруватого пакету, виявився неефективним.

В цьому відношенні подальше ефективне використання класичної теорії спричинило необхідність її вдосконалення і доопрацювання. Рядом вчених були запропоновані гіпотези і створені розрахункові моделі уточнюючі класичну теорію Кіргофа-Лява. В їх числі створена розрахункова модель, враховуюча величину і розподіл дотичних напружень в несучих шарах оболонкових структур. Отриманні рівняння коливань ізотропних оболонок, що ґрунтуються на використанні гіпотези розподілу дотичних напружень по товщині шаруватого пакету структури. Створена модель визначення динамічних і статичних характеристик цільного пакету структури, враховуюча конструкційні характеристики його шарів. Ці роботи стали початком вдосконалення класичної теорії, і хоч в подальшому самі зазнали змін, виявилися важливим кроком вирішення проблеми. Важлива роль в здійсненні цих робіт належить вченим: Я.М. Григоренку, А. Т. Василенку, Г.А. Ваніну, Б.Л. Пелеху, О. Ф. Рябову,

В. Г. Піскунову, О. О. Рассказову та іншим авторам, серед яких особливе значення належить Е. Рейснеру [9] і С.П. Тимошенко [10].

Робота Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко [11] засвідчила, що неоднорідність деформацій поперечного зсуву є результатом неоднорідності властивості матеріалу несучих шарів, що створює локальні кути повороту окремих шарів, обумовлених їх поперечним зсувом і дозволяє через один із них визначати деформацію всієї структури, незалежно від кількості шарів її пакету.

О.Ф. Рябовим [12] і В.Г. Піскуновим [13] уточнені деформаційні ефекти, пов'язані з неоднорідністю шарового пакету і виконані обчислення деформацій його несучих шарів. А.О. Рассказовим [14, 15] запропонований варіант теорії, враховуючий ефекти поперечного зсуву і обчислення їх величин в кожному із шарів структури. Інші роботи, засновані на використанні незалежного підходу до кожного шару отримали позитивну оцінку і в ряді інших досліджень цього напрямку [16-23]. А роботи [24-32], використовуючі в т.ч. незалежні гіпотези до кожного шару, підтвердили доцільність зроблених авторами припущень.

Врахування неоднорідності шаруватого пакету, передбачає і неklasична теорія Е. Рейснера [9]. Особливості цієї теорії були використані в моделі Мідліна-Рейснера, створеної на базі варіаційного принципу Рейснера. Але її використання є ефективним лише при значній товщині пластин.

$$\delta > 0,1F, \quad (1.3)$$

де δ - товщина пластини; F - площа її перерізу

Ці та інші уточнюючі класичну теорію роботи не забезпечують однак ефективність її використання при значній різниці властивостей окремих її шарів. Крім того класична теорія вносить значні обмеження в розрахунки динамічних задач.

В цьому відношенні проривною стала зсувна теорія оболонок і пластин типу С.П. Тимошенко [10]. Використані автором гіпотези передбачають, що:

- прямолінійний нормальний до серединної поверхні елемент структури, повертається в процесі деформації як ціле жорстке тіло на деякий кут, не

змінюючи свої довжини, і залишається перпендикулярним до деформованої поверхні;

- нормальні напруження, діючі на площинах паралельних вихідній поверхні є незначними в порівнянні з іншими компонентами тензора напружень.

На відміну від гіпотези прямої лінії класичної теорії відсутньою в даному випадку є вимога збереження перпендикулярності відрізка до вихідної поверхні структури після її деформації. А повертаючийся в процесі деформації елемент структури на кут γ , зберігає свою залежність від дотичного напруження τ згідно:

$$\tau = G\gamma, \quad (1.2)$$

де G - модуль зсуву, характеризуючий жорсткість елементів до зсувної деформації.

Цю особливість було положено автором в основу його зсувної теорії. Створений з використанням варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського цей варіант теорії дозволив значно розширити коло розв'язуваних задач динаміки шаруватих структур. В подальшому, після низки уточнень, вона стала пріоритетною при розв'язанні таких задач. Важлива роль в її уточненнях і доповненнях належить роботам С.О. Амбарцумяна [33], Е.І. Григолюка [34-36], Я. М. Григоренка [11], В. І. Корольова [37], Б. Л. Пелеха [38, 39], О. Ф. Рябова [12] та інших авторів.

Існує ряд напрямів практичного використання цих теорій, включаючих математичне моделювання динамічних і статичних процесів, що відбуваються в оболонкових структурах, і можливості їх регулювання. До них відноситься:

- а) створення і розв'язання задач в тривимірній постановці;
- б) застосування досліджень враховуючих зсувні процеси, що відбуваються в окремих шаруватих структурах [метод гіпотез].
- в) заміну неоднорідної товщини пакету однорідною структурою з наведеними жорсткостями.

Перший забезпечує достовірність отриманої інформації і дозволяє виявляти похибки допущені при використанні інших підходів.

Другий, поступається першому у точності через складність розрахунків

пов'язану через більш значну кількість рівнянь розрахункової моделі.

Третій – є найбільш простим у використанні, але найменш точним.

Існуючі дослідження які характеризують стійкість шаруватих структур до динамічних впливів [24, 33, 40, 41], свідчать, що найбільш ефективним є моделювання динамічних процесів виконане на основі приведеного вище другого підходу.

Аналіз розрахункових моделей, створених із застосуванням методу гіпотез, наведено в роботах [33, 42, 43-47]. Цей метод передбачає використання також двох підходів: узагальненого до всього пакету і включаючого створення математичної моделі і розрахункового алгоритму її розв'язування. А другий, навпаки, враховує значну відмінність геометричних форм і різних властивостей окремих шарів структури. Він ґрунтується на використанні незалежних кінематичних гіпотез для кожного шару, і як показує практика, його використання є особливо ефективним і точним при розрахунках динамічних задач дво- і тришарових оболонкових структур. Прикладом створення і розв'язання таких задач є дослідження, наведені в роботах [3, 48]. При створенні розрахункових моделей, залежно від типу задач, використовуються різні гіпотези (жорсткої нормалі, прямої і ламаної лінії та ін.). В тих випадках, коли при моделюванні поперечним стисненням пакету можливо знехтувати, але необхідно врахувати податливість шарів на зсув, використовують гіпотезу ламаної лінії. Гіпотеза прямої недеформованої лінії має місце при переході в розрахунках від багат шарової до квазіоднорідної структури.

Крім наведених обґрунтувань, ефективному використанню приведених підходів сприяють також дослідження вітчизняних вчених О. М. Гузя [1, 49, 54], П.П. Лізунова [50], П. З. Лугового [16, 51], В. Ф. Мейша [52], В. В. Гайдайчука [31], В. І. Гуляєва [32, 53], К. Г. Головка [21], О. О. Рассказова [14], В. М. Трача [55] та ін.

Подальші удосконалення теорії і практики оболонкових структур стало результатом врахування впливу на них жорсткостних характеристик полімерного заповнювача. Виконані в цій області дослідження [48, 56, 57]

дозволили авторам зробити припущення відносно недоцільності врахування положень уточнюючих теорій при значній жорсткості полімерного заповнювача, а при відносно незначній - рахувати відсутніми тангенціальні напруження в пакеті структури. Інші дослідження показали, що збільшення жорсткості тришарової циліндричної структури за рахунок використання матеріалу заповнювача більш високої пружності [56] збільшило стійкість структури до імпульсних динамічних навантажень, але його ефективність з метою практичного використання потребує окремої оцінки.

Специфічним є вплив зміни жорсткості суцільного заповнювача при армуванні його дискретними ребрами. При значній густоті останніх, коли відстань між ними не перевищує ширину ребра, ефективним залишається використання гіпотез і методів класичної теорії [10, 58, 59], а при меншій інтенсивності армування і нерегулярній формі розміщення ребер, перевагу отримує некласична теорія.

Динамічні процеси, протікаючі в структурах, мають деформаційний і коливальний характер. Їх дослідження здійснюється, як правило поетапно і включають:

- визначення фізичних гіпотез;
- складання розрахункових рівнянь;
- виконання розрахунків і перевірку отриманих результатів;

1.2. Дослідження коливальних процесів оболонкових структур

Крім приведених вище деформаційних особливостей динаміки оболонкових структур, спеціальної оцінки потребує і динаміка коливань таких структур. Як свідчить практика, такі структури часто працюють в умовах специфічних динамічних впливів, ініціюючих в них коливальні процеси різної форми і інтенсивності.

Залежно від таких впливів коливання оболонкових структур є власними або вимушеними. В першому випадку вони являються результатом взаємодії внутрішніх сил структури після припинення дії на неї зовнішнього збурюючого

силового імпульсу, а в другому - коливання відбуваються під дією зовнішніх періодично змінюючихся сил. Основними характеристиками коливального процесу оболонкових структур є їх частота і форма коливань.

Перші системні дослідження коливань оболонкових структур були розпочаті в кінці минулого сторіччя і в різних формах продовжуються та вдосконалюються у теперішній час.

Дослідження О. М. Гузя, І. Я. Аміро, Ю. В. Скосаренко, Я. М. Григоренко, П. З. Лугового, Е. І. Григолюка, Т. А. Емельянової, І. М. Преображенського, О. О. Рассказова та інших авторів значно спростили вирішення проблеми коливань оболонкових структур, а отримані ними результати дозволили, крім того, визначити перспективні напрямки наступних досліджень в цій області.

Огляд наукових робіт, характеризуючих стан проблеми власних і вимушених коливань тонкостінних оболонкових структур, свідчить про її вирішення в структурах канонічних форм (циліндричних, конічних, сферичних) і проводяться нові напрямки досліджень, обумовлені сучасними вимогами до таких структур. Досліджується вплив жорсткосних характеристик впливаючих на коливання структур і взаємодія цих структур з іншими тілами і структурами, визначаються впливи на них особливостей силових факторів і оцінюється негативна роль їх недосконалостей та ін. Огляд наукових праць здійснений в роботах [60-84], практично повністю характеризує дану сторону власних коливань оболонкових структур. Аналізує вплив особливостей армування полімерного заповнювача дискретними ребрами на частоту і форму їх коливань. Показує вплив кута нахилу в конічних структурах і вплив інтенсивності армування сферичних структур та ін.

Інші роботи цього напрямку доповнюють теоретичну і розрахункову сторону визначення частот і форм власних коливань оболонкових структур. Т.А. Емельяновою отримані рівняння розрахункової моделі для створення алгоритму визначення власних частот тришарових циліндричних оболонок [82, 83]. Створене автором частотне рівняння забезпечує визначення величини першої частоти власних коливань циліндричної тришарової оболонкової структури

підкріпленої повздовжніми і поперечними ребрами.

Ю. А. Скосаренко наведена методика визначення величини характеристик власних коливань тришарової циліндричної оболонки, взаємодіючої з вісесиметричною пружною основою і досліджено вплив жорсткості цієї основи на величину частот власних коливань структури [84].

Дослідженню закономірностей вимушених коливань тонкостінних оболонкових структур також призначена значна кількість наукових праць, монографій і оглядів. Як і при дослідженнях власних коливань найбільш об'ємним і систематизованим являються матеріали приведені в [62]. Судячи по ним, рівень досліджень проблеми вимушених коливань оболонкових структур практично задовольняв технічні потреби. Більшість наукових праць, стосуючихся цієї проблеми, розглядають вплив вимушених коливань при дії на структуру гармонічного навантаження [85, 86], і враховують цю особливість при оцінці впливу підкріплень - дискретних ребер, їх напрямку розташування [58, 87, 88], а також пружності основи структур [89, 90], приєднаних мас [93] та ін.

Нові вимоги, висунуті сучасною технікою, передбачають використання несиметричних оболонкових структур і нестационарних умов їх навантажень. Розроблення рівнянь коливань таких структур з врахуванням наведених вище умов приведені в роботі [91].

Роботи І. Я. Аміро, П. З. Лугового, В. Ф. Мейша, В. О. Заруцького, Ю.В. Скосаренко, В. Г. Паламарчука та інших авторів висвітлюють і доповнюють дослідження вимушених коливань оболонкових структур, забезпечують відповідність структур сучасним вимогам техніки.

В роботі П. З. Лугового і співавторів [92] наведене рівняння коливань тришарових циліндричних оболонок з дискретним заповнювачем при нестационарних навантаженнях і пов'язано його використання в розрахунках нестационарних вимушених коливань тришарової циліндричної оболонки з поздовжньо-поперечним дискретним ребристим заповнювачем.

В. А. Заруцьким отримано рівняння руху тришарової оболонки з приєднаною масою, враховуюче вимушені коливання цієї структури [93].

Ю. В. Скосаренко, при дослідженнях вимушених коливань ребристої конічної оболонки під дією гармонічного навантаження [85] показано, що найменші резонансні частоти зменшуються при збільшенні кута конусності оболонок.

Важливою стороною досліджень є також оцінка дії вимушених коливань оболонкової структури за яких може виникати резонансне явище структури [95].

В роботі [96] розглянута задача про вимушені коливання циліндричної оболонки еліптичного перерізу на пружній основі під дією нестационарного навантаження і розроблено чисельний алгоритм розв'язку вихідної задачі. Наведено приклад чисельного розрахунку динамічної поведінки циліндричної панелі при дії внутрішнього розподіленого навантаження. А в роботі аналогічного напрямку [97] розглянуті задачі про вимушені коливання підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при розподіленому імпульсному навантаженні. При розв'язку поставленої задачі використовується метод скінченних різниць по просторовим та часовій координатам. Отримані чисельні результати дозволяють здійснювати детальний аналіз впливу пружної основи на напружено-деформований стан вихідної підкріпленої конструкції.

Таким чином, коливання оболонкових структур є суттєвою особливістю їх динамічної поведінки, так як їх деформаційні характеристики потребують визначення і врахування при забезпеченні стійкості таких структур до динамічних впливів.

Останнім часом, створення прогресивних технологій, об'єктів спеціального призначення часто призводить до необхідності розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. При цьому зазначені елементи піддаються динамічним навантаженням різного роду, в тому числі нестационарним навантаженням. Для таких оболонок проблеми динамічної поведінки вивчені недостатньо.

Важливим аспектом динаміки шаруватих оболонок є дослідження впливу пружності природного середовища на їх напружено деформований стан,

розв'язання задач включаючих в моделювання впливу пружності середовища в розрахунках динаміки конкретних оболонкових структур. При вирішенні цієї сторони проблеми використовується два підходи: створення і розв'язання тривимірних рівнянь механіки суцільних середовищ і використання окремих кінематичних і силових параметрів, діючих на пружну конструкцію. До останнього підходу відносяться пружні основи Вінклера, Пастерника [89], Власова [90] та ін. Згідно основного підходу дія пружного середовища (повітряного, рідинного, ґрунтового) та підкріплюючих елементів структури замінюється дією пружної основи, що спрощує постановку і розв'язання задач першого підходу, але являється менш точним. Існують варіанти другого підходу, які враховують сумісний вплив пружної основи і підкріплюючих елементів.

Розвиток другого підходу, запропонований В.М. Ляховим [98], передбачає, що стиск компонент в середовищі відбувається миттєво по тих же рівняннях, що і у вільному стані. Це дещо зменшує точність отриманої інформації, але в багатьох випадках є достатнім для прийняття ефективних практичних рішень. Розв'язання аналогічних задач на основі першого підходу являється більш точним, але має труднощі розрахункового характеру.

Значна роль в дослідженнях впливу пружності зовнішнього середовища на динаміку оболонкових структур математичному моделюванню цих процесів належить І. Я. Амірі [91], В. З. Власову [90], П. З. Луговому [92, 99, 100], В.Ф. Мейшу [101], С. С. Григоряну [102], В. В. Новожилову [3], Ю. В. Скосаренку [103] та іншим авторам.

2. Динамічна поведінка несиметричних оболонок різної форми з неоднорідним заповнювачем

2.1. Залежності деформацій, зусиль та моментів

Розглянемо просторовий елемент оболонки постійної товщини, обмежений нормальними до серединної поверхні перерізами, розташованими по лініях α_1 , $\alpha_1 + \Delta \alpha_1$ та $\alpha_2 + \Delta \alpha_2$. Прийmemo σ_{11}, σ_{22} - нормальні напруження, діючі на площадках, обмежуючих даний елемент; σ_{12}, σ_{21} - дотичні напруження, діючі на тих самих площадках, паралельно серединній поверхні; σ_{13}, σ_{23} - дотичні напруження, діючі на тих самих площадках, нормально до серединної поверхні рис. 2.1.

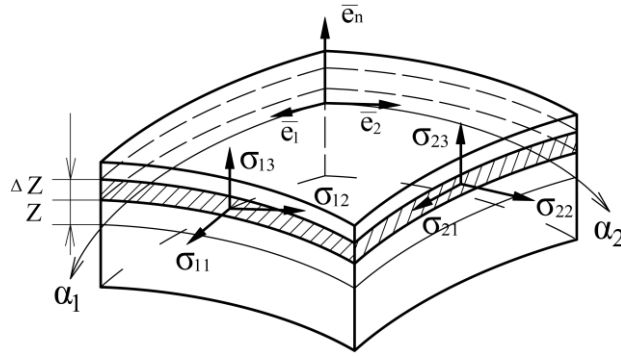


Рис. 2.1. Грані просторового елемента оболонки

Загальні вирази компонентів тензора деформацій $\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{ij}$ оболонкових структур мають вид [104]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right); \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

де

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} U_3; \\ e_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{U_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{U_1}{H_1} \right); \\ \omega_1 &= \frac{1}{2 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} H_3 U_3 - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_2 U_2) \right] \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$H_i (i = 1, 2, 3)$ - коефіцієнти Ляме.

Вирази відсутніх компонентів тензора деформацій отримуються круговою перестановкою індексів.

Фізичний зміст показників $\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{ij}$ полягає в наступному: компоненти деформації ε_{ii} характеризують подовження лінійних елементів, паралельних до деформації координатним осям, а компоненти ε_{ij} характеризують зміну величини кута між цими лінійними елементами, який до деформації був прямим.

Використання компонент деформацій доповнене величинами шести зусиль $T_1, T_{12}, N_1, T_2, T_{21}, N_2$ і чотирма моментами M_1, M_{12}, M_2, M_{21} (рис. 2.2) повністю характеризують напружено-деформований стан оболонкових структур [3].

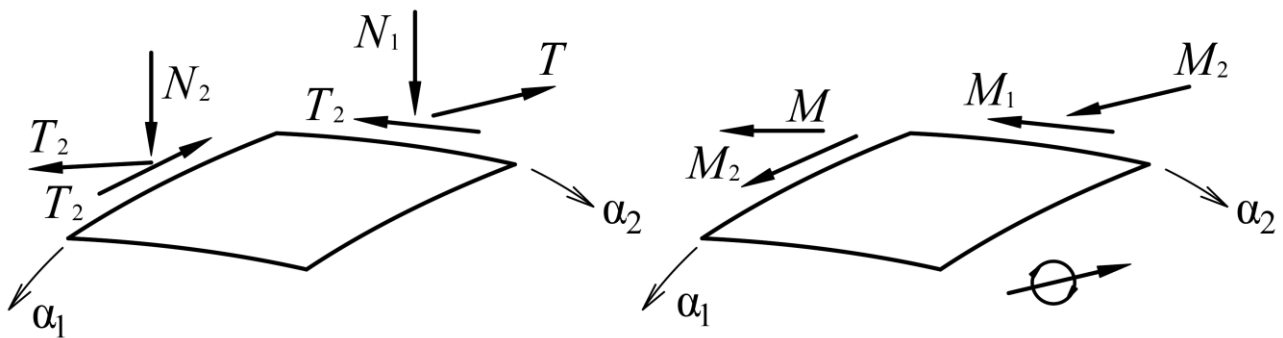


Рис. 2.2 Додатні напрямки зусиль і моментів

$$T_1, T_{12}, N_1, T_2, T_{21}, N_2, M_1, M_{12}, M_2, M_{21}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{S_{11}}{A_2 d \alpha_2} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{11} (1 + z/R_2) dz, \\ T_{12} &= \frac{S_{12}}{A_2 d \alpha_2} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{12} (1 + z/R_2) dz, \\ N_1 &= \frac{S_{13}}{A_2 d \alpha_2} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{13} (1 + z/R_2) dz, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$T_1 = \frac{S_{11}}{A_2 d\alpha_2} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{11} (1 + z/R_2) dz,$$

$$T_2 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{22} (1 + z/R_1) dz,$$

$$T_{21} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{21} (1 + z/R_1) dz,$$

$$N_2 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_{23} (1 + z/R_1) dz$$

$$M_1 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z (1 + z/R_2) \sigma_{11} dz, \quad M_{12} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z (1 + z/R_2) \sigma_{12} dz,$$

$$M_2 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z (1 + z/R_1) \sigma_{22} dz, \quad M_{21} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z (1 + z/R_1) \sigma_{21} dz$$

2.2. Деформації і коливання елементів тришарової циліндричної оболонки

Тришаровий елемент досліджуємої циліндричної структури (рис. 2.3), являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з несучими шарами. Елемент має постійну

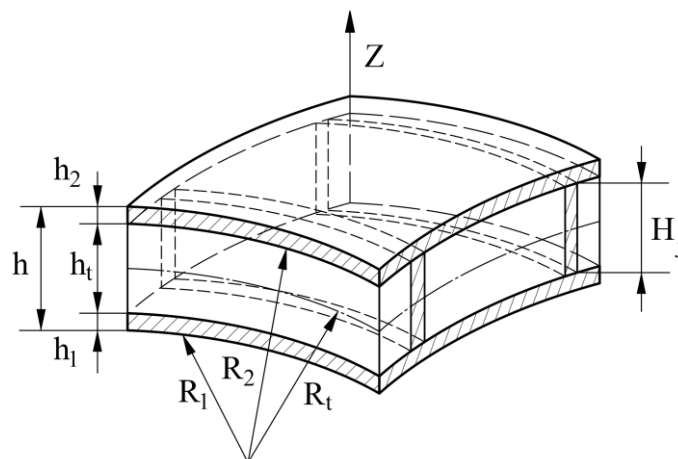


Рис. 2.3. Тришаровий елемент оболонки з армуючими ребрами

загальну товщину h і гладку серединну поверхню в системі координат x, z . Його координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з осьюовою лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Величина z вважається додатною, якщо розглядаєма точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні.

Наявність легкого пружного матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими оболонками створює дискретну неоднорідність ребристого заповнювача і напружено-деформований стан внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок може бути визначеним через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \phi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \phi_1^2)^T$. Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень – $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{3i}, \phi_{1i})^T$ згідно моделі, розробленої в роботі [105]. Деформований стан армуючих ребер, спрямованих вздовж колової координати, визначаються узагальненим вектором переміщень $\bar{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \phi_1^j)^T$.

Використовуючи зсувну теорію оболонок і стержнів С. П. Тимошенко [106], переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах оболонки в поздовжньому напрямку x, z і по товщині в момент часу t при малих лінійних переміщеннях виражаються наступними залежностями:

$$\begin{aligned} u_1^i(x, z, t) &= u_{01}^i(x, t) + z_i \phi_1^i(x, t) \\ u_3^i(x, z, t) &= u_{03}^i(x, t) \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

де: z_i – вертикальна координата кожного несучого шару, яка вимірюється вгору від серединної поверхні цього шару; ϕ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

Кінематичні залежності для несучих шарів при малих деформаціях структури мають вид:

$$\varepsilon_{11}^i = \varepsilon_{011}^i + z_i k_{11}^i, \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_{03}^i}{R_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.2)$$

$$2\varepsilon_{13}^i = \varepsilon_{013}^i,$$

де:

$$\varepsilon_{011}^i = \frac{\partial u_0^i}{\partial x}; \varepsilon_{022}^i = \frac{u_{03}^i}{R_i}; \varepsilon_{013}^i = \frac{\partial u_{03}^i}{\partial x} + \varphi_1^i; k_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x}, i = 1, 2. \quad (2.2.3)$$

Показники $\varepsilon_{011}^i, \varepsilon_{022}^i, \varepsilon_{013}^i$ являються компонентами деформацій серединних поверхонь несучих шарів структури.

Умови жорсткого з'єднання армуючих ребер з несучими шарами оболонки, на лініях контакту центрів тяжіння ребер з указаними шарами мають вид [57]:

$$u_1^j = u_1^{jk}(x_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(x_j), \quad (2.2.4)$$

$$u_3^j = u_3^{jk}(x_j), \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(x_j) \quad k=1, 2$$

де x_j – координата лінії множин точок проекцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучої оболонки;

$h_j^i = 0,5h_i + \frac{H_i}{2}$, h_i ($i = 1, 2$) – товщини циліндричних несучих оболонок; $\frac{H_j}{2}$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача $h_t = H_j$. $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

Переміщення легкого заповнювача визначається згідно моделі наведених в роботі [108]:

$$\begin{cases} u_1^t(x, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(x, t) + z_t u_1^t(x, t); \\ u_3^t(x, z, t) = u_{03}^t(x, t) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Кінематичні залежності деформацій легкого заповнювача при малих деформаціях структур шаруватих оболонок дещо змінюються і мають вид:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial x} + z \frac{u_1^t}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_{03}^t}{R_t + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial x}\right) + u_1^t; \quad (2.2.6)$$

де u_0^t, u_1^t, u_{03}^t – компоненти узагальненого вектора переміщень легкого заповнювача.

Модель ідеального сполучення заповнювача з несучими шарами оболонок без відриву і проковзування, описується наступним чином [105]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^i + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^i; \\ u_{03}^t = u_{03}^i; \end{cases} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{cases} \text{для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -h_t/2); \\ \text{для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = h_t/2). \end{cases}$$

Приймаючи до уваги вирази для полів переміщень несучих шарів (2.2.1), легкого заповнювача (2.2.5) і умови міжшарової неперервності переміщень (2.2.7), спрощені умови їх сумісності мають вид:

$$\begin{aligned} u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \\ u_1^t &= \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \\ u_{03}^t &= \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Зусилля і моменти армуючих ребер заповнювача в даному випадку обчислюються за формулами:

$$T_{11j} = \int_{F_j} \sigma_{11j} dF_j; \quad Q_{13j} = \int_{F_j} \sigma_{13j} dF_j; \quad M_{11j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{11j} dF_j \quad (2.2.9)$$

Рівняння руху несучих шарів і ребристого легкого заповнювача визначаються згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона - Остроградського:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (2.2.10)$$

де Π – повна потенційна енергія пружної системи, K – повна кінетична енергія пружної системи, A – робота зовнішніх сил, t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок незалежному варіюванню підлягають компоненти переміщень несучих шарів і заповнювача, а також компоненти переміщень його армуючих ребер.

Вирази повної потенційної і кінетичної енергії структури записуються у наступному виді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_t} \Pi^t; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_t} K^t; \quad (2.2.11)$$

$$\delta \Pi^i = \int_S (T_{11}^i \delta E_{11}^i + T_{22}^i \delta E_{22}^i + T_{13}^i \delta E_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i) dS \quad (2.2.12)$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_t} \left[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} (T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta \varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{1t}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t) dz \right] dS_t \quad (2.2.13)$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} T_{22}^j \delta \varepsilon_{22}^j dL_j \quad (2.2.14)$$

$$\delta K^i = \int_S \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial t^2} \delta \phi_1^i \right) \right] dS \quad (2.2.15)$$

$$\delta K^t = \int_{S_t} \left[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz \right] dS_t; \quad (2.2.16)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \phi_1^j}{\partial t^2} \delta \phi_1^j \right) \right] dL_j. \quad (2.2.17)$$

В рівнянні (2.2.17) величини; F^j, I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер, ρ_j – густина матеріалу армуючого ребра; ρ_i ($i=1,2$), ρ_t – густини матеріалів несучих оболонок і легкого заповнювача відповідно.

Слід відзначити, що при розрахунку потенційної і кінетичної енергії легкого заповнювача в виразах $\delta \Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Що практично не впливає на загальну похибку розрахунків, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання не перевищує 2 - 5%.

В рівняннях коливань таких тришарових циліндричних оболонок незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів оболонок, армуючих ребер і заповнювача.

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (2.2.10), з урахуванням співвідношень (2.2.11) - (2.2.17), отримано дві системи гіперболічних рівнянь руху дев'ятого порядку описаного тришарового циліндричного елемента при осесиметричному імпульсному навантаженні структури, враховуючі відповідні граничні і початкові умови.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} - \frac{1}{R_t} N_{13}^t &= \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_i h_i}{3} \right) \frac{\partial^2 u_i^t}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} - \frac{T_{11}^t}{R_{li}} - \frac{1}{R_{li} h_t} M_{11}^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} - P_2 \delta(x-a) - \left(1 \pm \frac{h_i}{2R_{li}} \right) P_1 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t - N_{13}^t &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_i^t}{\partial t^2} \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 w_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_t \frac{h_t^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \\ \left[T_{11}^{i\pm} \right]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad \left[T_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \quad \left[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2}, \quad i=1,2; \quad j=\overline{1,J} \end{aligned}$$

Ці системи рівнянь утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі оболонки-армуючі ребра».

На лініях розривів в рівняннях коливань (2.2.18) величини $\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j$; $\left[T_{13}^{i\pm} \right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm} \right]_j$ – відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих оболонок.

Вважається, що тришарова циліндрична структура навантажується внутрішнім вісесиметричним розподіленим нестационарним нормальним навантаженням $P_1(x, t)$.

Зусилля і моменти їх несучих шарів визначаються:

$$T_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{11}^i dz_i; \quad T_{22}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{22}^i dz_i; \quad M_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_i \sigma_{11}^i dz_i; \quad T_{13}^i = k_s \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{13}^i dz_i, \quad (2.2.19)$$

а зусилля і моменти легкого заповнювача:

$$T_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \sigma_{13}^t dz_t \quad (2.2.20)$$

Аналогічні характеристики дискретних армуючих ребер заповнювача (зусилля і моменти) обчислюються за наступними формулами:

$$T_{11}^j = \int_{F_j} \sigma_{11}^j dF_j; \quad T_{13}^j = \int_{F_j} \sigma_{13}^j dF_j; \quad M_{11}^j = \int_{F_j} z_j \sigma_{11}^j dF_j \quad (2.2.21)$$

Складність вирішення задачі коливань неоднорідних пружних структур з урахуванням дискретності армуючих ребер заповнювача є наявність розривних коефіцієнтів в трьох останніх рівняннях (2.2.18). Що, створює численні алгоритми в гладкій області які "склеюються" на лініях розривів враховуючи кінематичні умови їх з'єднання [57]. Але, можливості сучасних обчислювальних скінчено-елементних комплексів забезпечують вирішення цієї проблеми [109].

2.3. Розрахункові рівняння динаміки тришарових конічних оболонкових структур при нестационарних навантаженнях

Дискретно-симетрична неоднорідна пружна структура конічного типу являє собою конструкцію, яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких конічних оболонок (внутрішній і зовнішній несучі шари) з відповідними товщинами і радіусами. Серединні лінії цих шарів паралельні, тобто кут їх конусності α , z . є загальним. Оболонка має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат s, z . Координатна лінія s на серединній поверхні оболонки при $z=0$ збігається з твірною лінією; а координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Вважається, що величина z є позитивною, якщо точка знаходиться з боку опуклості її серединної поверхні. При розрахунках коливань цієї структури використовується система координат s, t , причому координата s відраховується від вершини конуса. А у випадку зрізаної оболонки, більш зручним є використання координати s , яка відраховується від краю оболонки з радіусом R_0 . В цьому випадку поточний радіус конічної оболонки розраховується згідно формули: $R_s = R_0 + s \cdot \sin \alpha$, де α – кут конусності.

Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні конічної оболонки записуються наступним чином: $A_1 = 1, A_2 = R_s, k_1 = 0, k_2 = \cos \alpha / R_s$. Несучі шари цієї оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами легкого заповнювача. Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього

несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \phi_1^1)^T$ і $\overline{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \phi_1^2)^T$ [106]. Поля переміщень легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення – $\overline{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \phi_1^t)^T$ згідно моделі, запропонованої в роботі [108]. Деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж окружної координати, визначається узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \phi_1^j)^T$.

На основі теорії деформації зсуву в шаруватих оболонках [106], переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в поздовжньому напрямку s , по товщині z і в момент часу t при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_i \phi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

де ϕ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

В цьому випадку деформаційні співвідношення несучих шарів і j -го ребра оболонки приймаються у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} u_1 + k_2 u_3; \\ \varepsilon_{13} &= \phi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial s_1}; \quad \kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \phi_1; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

При жорсткому з'єднанні армуючих ребер структури з її несучими шарами, умови контакту центрів ваги цих ребер і несучих шарів записуються наступним чином [111]

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2} \phi_1^{jk}(s_j); \quad u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \quad \phi_1^j = \phi_1^{jk}(s_j) \quad (k = 1, 2), \quad (2.3.3)$$

де s_j – координата лінії множин точок проекцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; $h_j^i = 0,5h_i + H_i/2$, h_i ($i = 1, 2$) – товщини несучих шарів; $H_j/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; $h_i = H_j$ – товщина легкого заповнювача

Вирази переміщень легкого заповнювача приймаються згідно моделі [108]:

$$\begin{aligned} u_1^t(s, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) &= u_{03}^t(s, t). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

А кінематичні залежності для легкого заповнювача прийняті на основі гіпотез малих деформацій:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial s} + z \frac{\partial u_1^t}{\partial s}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_{03}^t}{R_{st} + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \frac{\partial u_{03}^t}{\partial s} + u_1^t; \quad \kappa_{11}^t = \frac{\partial u_1^t}{\partial s}. \quad (2.3.5)$$

Умови сумісності, передбачаючи ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представлені в наступному вигляді [105] мають вид:

$$u_1^t(z = z_t^1) = u_0^i + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^i; \quad u_{03}^t = u_{03}^i; \quad \begin{cases} \text{для } i = 1 \rightarrow \left(k = 0; z_t^1 = -\frac{h_t}{2}\right); \\ \text{для } i = 2 \rightarrow \left(k = 1; z_t^2 = \frac{h_t}{2}\right). \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Використовуючи вирази поля переміщень для несучих шарів (2.3.2), легкого заповнювача (2.3.4) і умов міжшарової неперервності переміщень (2.3.6), спрощені умови їх сумісності представляються залежностями:

$$u_0^t = \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \quad u_1^t = \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \quad (2.3.7)$$

$$u_{03}^t = \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2).$$

Рівняння руху для несучих шарів і легкого заповнювача отримані згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, відповідно якому

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (2.3.8)$$

де Π – повна потенційна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу.

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягали: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів представляються у наступному вигляді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_t} \Pi^t; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_t} K^t, \quad (2.3.9)$$

де

$$\delta \Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta \kappa_{22}^i \right) dz_i \right] dS_i; \quad (2.3.10)$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_t} \left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t \right) dz_t \right] dS_t; \quad (2.3.11)$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} \left(T_{11j} \delta \varepsilon_{11j} + T_{13j} \delta \varepsilon_{13j} + M_{11j} \delta \kappa_{11j} \right) dL_j; \quad (2.3.12)$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2} \delta u_0^i + \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \delta u_{03}^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i; \quad (2.3.13)$$

$$\delta K^t = \int_{S_t} \left[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_t; \quad (2.3.14)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j \quad (2.3.15)$$

В рівняннях (2.3.10) – (2.3.15) величини F^j , I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних перетинів армуючих ребер; ρ_j – питома вага матеріалу армуючого ребра; ρ_i ($i=1, 2$), ρ_t – питома вага матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача відповідно.

Вважається, що тришарова конічна структура навантажена внутрішнім осесиметричним розподіленим нестационарним нормальним навантаженням $P_1(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

При розрахунку потенційної і кінетичної енергії легкого заповнювача в виразах $\delta \Pi^t$ та δK^t інтегрування проводилось за об'ємом, величина якого збільшена на величину об'єму армуючих ребер (5%), що практично. Але це не вплинуло на загальну похибку розрахунку.

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягали: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Після перетворень в варіаційному рівнянні (2.3.8), з урахуванням співвідношень (2.3.9) – (2.3.15), отримана система гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку даної тришарової конічної оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні, враховуючі граничні умови:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{11}^i) - \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{22}^i) - \frac{1}{R_i} T_{13}^i = \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_i h_i}{3} \right) \frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i M_{11}^i) - \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i M_{22}^i) - T_{13}^i - T_{13}^t = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{13}^i) - k_2 T_{22}^i + \frac{1}{h_i} T_{13}^t - \left(1 \pm \frac{h_i}{2R_{1s}} \right) P_1 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \quad (i=1, 2); \\
 & \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_i} N_{13}^t = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} = \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\
 & [T_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad [T_{13}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad [M_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

На лініях розривів в рівняннях коливань (2.3.16) $[T_{11}^{i\pm}]_j$; $[T_{13}^{i\pm}]_j$; $[M_{11}^{i\pm}]_j$ – відповідає зусиллям-моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих шарів. Крім цього, система рівнянь коливань (2.3.16) тришарової конічної оболонки розпадається за рахунок розривів «дискретний елемент – несучий шар», коли несучі шари виготовлені з різних матеріалів.

Співвідношення між величинами зусиль – моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер в цих випадках мають вид:

$$\begin{aligned}
 T_{11}^i &= B_{11}^i (\varepsilon_{11}^i + \nu_2^i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = B_{22}^i (\varepsilon_{22}^i + \nu_1^i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = k^2 G_{13}^i \varepsilon_{13}^i; \\
 M_{11}^i &= D_{11}^i \kappa_{11}^i; \quad M_{22}^i = D_{22}^i \kappa_{22}^i; \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j};
 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

E_i, G_{13}^i, ν_i – фізико-механічні параметри матеріалу несучих шарів; k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву теорії оболонок С.П. Тимошенка; E_j, F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перерізу j -го ребра відповідно.

Зусилля і моменти для розрахунку легкого заповнювача мають вид:

$$T_{11}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{13}^t dz_t. \tag{2.3.18}$$

А рівняння коливань структури (2.3.16) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

2.4. Особливості розрахунків тришарових сферичних структур

Як і попередні тришарові оболонкові структури, сферична оболонка являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних

ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими шарами. Оболонка має постійну загальну товщину h і віднесена до координат α, z . Координатна лінія $R\alpha$ на серединній поверхні оболонки при $z=0$ збігається з твірною лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединних поверхонь. Вважається величина z є додатньою, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні шару оболонки. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього несучих шарів представлені через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\overline{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [106]. Поля переміщень для легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\overline{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \varphi_1^t)^T$ згідно моделі, запропонованої в [108]. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні записуються наступним чином: $A_1 = A_2 = R_t$, $k_1 = k_2 = 1/R_t$.

Деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж колової координати, визначається узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$. При жорсткому з'єднанні армуючих ребер із несучими шарами, умови контакту центрів ваги ребер з несучими шарами [111] мають вид:

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(s_j); u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(s_j) \quad (k = 1, 2), \quad (2.4.1)$$

де $s_j = R\alpha_j$ – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; $h_t = H_j$ – товщина легкого заповнювача. При цьому: $h_i^j = 0,5h_i + H_i/2$, $h_i (i=1, 2)$ – товщини сферичних несучих шарів; $H_i/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок.

На основі теорії деформації зсуву в оболонках переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку α (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_i \varphi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t) \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

де φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

При цьому деформаційні співвідношення для несучих шарів і j -го ребра приймаються у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_0^i}{\partial s_i} + \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_0^i}{R_i} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{13}^i = \varphi_1^i; \\ \kappa_{11}^i &= \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial s_i}; \quad \kappa_{22}^i = \frac{\varphi_1^i}{R_i} \operatorname{ctg} \alpha; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}.\end{aligned}\quad (2.4.3)$$

А вирази для переміщень легкого заповнювача приймаються згідно моделі [8] і мають вид:

$$\begin{aligned}u_1^t(s, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) &= u_{03}^t(s, t).\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

Кінематичні залежності для заповнювача прийняті з врахуванням малої деформації:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^t &= \frac{1}{(1 + z_t / R_t)} \left(\frac{\partial u_0^t}{\partial s} + \frac{u_{03}^t}{R_t} \right); \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_3^t}{R_t + z_t}; \\ 2\varepsilon_{13}^t &= \frac{1}{(1 + z_t / R_t)} \left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial s} - \frac{u_0^t}{R_t} \right) + u_1^t.\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

Умови сумісності, передбачаючи ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, мають в наступний вигляді [105]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^t; & \begin{cases} \text{для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -h_t/2); \\ \text{для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = h_t/2). \end{cases} \\ u_{03}^t = u_{03}^t; \end{cases}\quad (2.4.6)$$

Використовуючи вирази полів переміщень для несучих шарів (2.4.1), легкого заповнювача (2.4.3) і міжшарової неперервності переміщень (2.4.5), спрощені умови сумісності мають вид:

$$\begin{aligned}u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \\ u_1^t &= \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \\ u_{03}^t &= \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2).\end{aligned}\quad (2.4.7)$$

Рівняння руху для несучих шарів, ребер і легкого заповнювача визначаються згідно варіаційному принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно якому:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (2.4.8)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів представляються у наступному вигляді [107]:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_i} \Pi^i; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_i} K^i; \quad (2.4.9)$$

де

$$\delta \Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta \kappa_{22}^i \right) dz_i \right] dS_i; \quad (2.4.10)$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_t} \left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta \varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t + M_{22}^t \delta \kappa_{22}^t \right) dz_t \right] dS_t; \quad (2.4.11)$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} \left(T_{11j} \delta \varepsilon_{11j} + T_{22j} \delta \varepsilon_{22j} + T_{13j} \delta \varepsilon_{13j} + M_{11j} \delta \kappa_{11j} \right) dL_j;$$

$$(2.4.12)$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i; \quad (2.4.13)$$

$$\delta K^t = \int_{S_t} \left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_t; \quad (2.4.14)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j. \quad (2.4.15)$$

В рівняннях (2.4.10) – (2.4.15) величини F^j, I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер; ρ_j – питома вага матеріалу армуючого ребра; ρ_i, ρ_t – питома вага матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача, відповідно.

Вважається, що тришарова сферична структура навантажена внутрішнім

осесиметричним розподіленням нестационарним нормальним навантаженням $P_1(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

Слід зазначити, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах $\delta\Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але це практично не впливає на загальну похибку, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для таких оболонок обертання менше 5%.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (2.4.8), з урахуванням співвідношень (2.4.10) – (2.4.15), отримана система гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку тришарової сферичної оболонки з легким заповнювачем армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідних граничних і початкових умови мають вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{11}^i) - \frac{1}{R_i} (\operatorname{ctg} \alpha T_{22}^i - T_{13}^i) - \frac{1}{R_t} T_{13}^i = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{13}^i) - \frac{1}{R_i} (T_{11}^i + T_{22}^i) - \frac{1}{R_t h_t} (M_{11}^i + M_{22}^i) + P_3 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_i} M_{22}^i - T_{13}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2); \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{11}^t) + \frac{1}{R_t} (T_{11}^i - T_{13}^i) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha M_{11}^t) - T_{13}^i + \frac{1}{R_{t1}} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{13}^t) - \frac{1}{R_t} (T_{11}^i + T_{22}^i) = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2}; \\ & [T_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad [T_{13}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad [M_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Рівняння коливань таких несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами гіперболічних рівнянь дев'ятого порядку, які утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі шари-армуючі елементи», «несучі шари-виготовлені з різних матеріалів».

На лініях розривів в рівняннях коливань (2.4.16) $[T_{11}^{i\pm}]_j$; $[T_{13}^{i\pm}]_j$; $[M_{11}^{i\pm}]_j$ –

відповідають зусиллям і моментам, які діють на j - й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Рівняння коливань (2.4.16) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами для конкретних структур.

Таким чином, якісні і кількісні зміни, виникаючі в тришарових оболонкових структурах різної форми: циліндричної, конічної і сферичної, є результатом дії на них особливостей силового навантаження, геометричних параметрів їх шарового пакету і фізико-механічних властивостей його конструкційних матеріалів.

Наведені в даному розділі розрахункові моделі оболонкових структур, дозволяють охарактеризувати їх коливальні процеси при нестационарних динамічних навантаженнях цих структур. Використання гіпотез до кожного окремого шару структури, передбачених теорією С. П. Тимошенко, дозволяє оцінювати динамічну поведінку таких структур, а застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського дозволило записати рівняння руху для несучих шарів, ребер та полімерного заповнювача.

Враховуючи, що властивості матеріалів суміжних шарів досліджуваних у даній роботі неоднорідних оболонкових структур є досить різними, відповідні початково-крайові задачі подальшого динамічного аналізу доцільно розв'язувати за допомогою використання скінченно-елементного методу.

3. Використання методу скінченних елементів в задачах динаміки шаруватих оболонкових структур

3.1. Чисельні методи розв'язання задач динаміки

Більшість сучасних задач механіки неможливо розв'язати класичними методами. Це пояснюється високими порядками диференціальних рівнянь таких задач, складністю їх специфіки та іншими обставинами. В цих умовах значну роль відіграють чисельні методи розв'язання рівнянь таких задач. Їх використання стало особливо ефективним при розрахунках задач динаміки оболонкових структур.

Найбільш універсальним і ефективним в цьому відношенні виявився *метод скінченних елементів* (МСЕ). Основна ідея його полягає в тому, що неперервна величина (деформація, температура, тиск та ін.) може бути представлена її дискретною моделлю, яка складається із множини шматково-неперервних функцій, визначених на кінцевому числі підобластей. В загальному вигляді, неперервна величина є невідомою і потребує визначення в конкретній точці її області. Такий підхід забезпечує розв'язання практично всіх задач фізики і механіки, які можливо апроксимувати диференціальними рівняннями. З математичної точки зору, область, в якій здійснюється розв'язування системи диференціальних рівнянь МСЕ, розділяється на підобласті (елементи) і для кожного елемента вибирається апроксимуюча функція довільного виду. Найбільш простий випадок функції – поліном першого ступеня: коли обрана функція елемента дорівнює нулю, а на границях (у вузлах) функція приймає значення, які і є рішенням задачі. Звичайно, вони заздалегідь невідомі. Коефіцієнти полінома апроксимуючої функції знаходять з умов рівності значень сусідніх функцій у вузлах. Далі складається система лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких число невідомих дорівнює числу ступенів свободи системи.

Таким чином МСЕ вирішує конкретну математичну задачу всі особливості якої враховані при її постановці. Але якщо в силу різних обставин відбулися зміни в математичній моделі (наприклад, при спрощенні вимог інженерної задачі), необхідно внести корегування і в скінченно-елементну модель.

3.2. Основні співвідношення методу скінченних елементів

Просторові (об'ємні) скінченні елементи

Повна потенційна енергія пружної системи може бути розділена на дві частини, одна з яких відповідає енергії деформацій в тілі, а друга визначається потенціальною енергією масових і прикладених поверхневих сил. У відповідності з цим повна потенціальна енергія має вигляд [116]

$$\Pi = E + W_p, \quad (3.2.1)$$

де E – енергія деформацій, а W_p – потенціальна енергія прикладених сил.

Робота зовнішніх сил протилежна за знаком їх потенціальній енергії:

$$W = -W_p \quad (3.2.2)$$

Із формул (3.2.1) і (3.2.2) отримуємо

$$\Pi = E - W \quad (3.2.3)$$

Після розбивки області на елементи рівність (3.2.3) записується у вигляді суми

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \left(E^{(e)} - W^{(e)} \right) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)} \quad (3.2.4)$$

Енергія деформації нескінченно малого об'єму dV визначається формулою

$$dE = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \frac{1}{2} \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\}, \quad (3.2.5)$$

де $\{\varepsilon\}$ – повна деформація, а $\{\varepsilon_0\}$ – початкова деформація. Величина dE називається густиною енергії деформації, а повна енергія деформації отримується інтегруванням цієї величини по об'єму тіла:

$$E = \int_V \frac{1}{2} \left(\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\} \right) dV \quad (3.2.6)$$

Вигляд векторних стовпців $\{\varepsilon\}$ і $\{\sigma\}$ залежить від того, яка задача розв'язується. Наприклад для двовимірного випадку плоскої деформації ці вектор-стовпці мають вигляд

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}]$$

та

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}]$$

В основі теорії пружності лежать два важливих співвідношення: закон Гука, який пов'язує компоненти тензорів напружень та деформацій, і співвідношення зв'язку між деформаціями і переміщеннями. Закон Гука в загальній формі має вигляд:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_0\}, \quad (3.2.7)$$

де $[D]$ містить пружні константи матеріалу. Співвідношення зв'язку між деформаціями і переміщеннями записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

де u , v та w – компоненти переміщень в напрямку координатних осей x , y і z відповідно. Ці компоненти переміщень виражаються через вузлові значення наступним чином:

$$\{u\} = [N]\{U\} \quad (3.2.9)$$

Тут $[N]$ – матриця функцій форми

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ U_{3i} \\ U_{3j-2} \\ U_{3j-1} \\ U_{3j} \\ U_{3k-2} \\ U_{3k-1} \\ U_{3k} \end{Bmatrix} \quad (3.2.10)$$

За допомогою формул (3.2.8) можна виразити вектор деформації $\{\varepsilon\}$ через вузлові переміщення $\{U\}$. Загальна форма цих співвідношень представляється як:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \quad (3.2.11)$$

Де $[B]$ – матриця, яка отримується диференціюванням належним чином матриці $[N]$. Фактичні значення коефіцієнтів матриці $[B]$ залежать від вигляду елемента, який використовується, і від типу розглядаємої задачі.

Енергія деформації $E^{(e)}$ окремого елемента за допомогою формул (3.2.6) і (3.2.11) може бути записана в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} E^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} & \left(\{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} - \right. \\ & \left. - 2\{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} + \{\varepsilon_0^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} \right) dV \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Останній доданок в (3.2.12) не залежить від вузлових значень $\{U\}$, тому він не впливає на процес мінімізації і в подальших посиланнях на (3.2.12) не прийматиметься до уваги.

Робота, яка здійснюється зовнішніми силами, може бути розділена на три

різні частини, включаючи: роботу W_c , що здійснюється зосередженими силами, роботу W_p , яка отримується в результаті дії компонент напружень на зовнішній стороні поверхні і роботу W_b , яка здійснюється масовими силами.

Роботу зосереджених сил можна легко визначити, якщо в кожній точці прикладання зосередженої сили розмістити вузол. Робота зосередженої сили дорівнює добутку величини цієї сили на довжину шляху, на якому вона діє. Таким чином, робота окремої сили дорівнює $P \cdot U$. Позначивши вузлові точки через $\{P\}$, а вузлові переміщення через $\{U\}$, здійснену роботу можна записати у вигляді добутку:

$$W_c = \{U\}^T \{P\} = \{P\}^T \{U\} \quad (3.2.13)$$

Це передбачає, що сили розкладені на компоненти, паралельні компонентам переміщень. Ця частина повної роботи не входить в суму (1.4), так як розглянуті сили зосереджені у вузлах.

Робота об'ємних сил X , Y , Z подається формулою

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} (uX + vY + wZ) dV, \quad (3.2.14)$$

де u , v та w – компоненти вектора переміщень всередині елемента вздовж осі x , y і z відповідно. Інтегральний підхід тут є необхідним, так як u , v та w разом з X , Y , Z можуть змінюватися всередині елемента. Використовуючи рівність (3.2.9), формулу (3.2.14) можна виразити у вигляді

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \\ Z^{(e)} \end{Bmatrix} dV \quad (3.2.15)$$

Робота поверхневих сил визначається наступним чином:

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} (u p_x^{(e)} + v p_y^{(e)} + w p_z^{(e)}) dS \quad (3.2.16)$$

де u , v та w – компоненти вектора переміщень, а p_x , p_y і p_z – компоненти вектора напружень, паралельні координатним осям x , y і z .

Порівняння формул (3.2.16) і (3.2.14) показує, що вони ідентичні по формі. Тому

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS \quad (3.2.17)$$

Використовуючи формули (3.2.4), (3.2.12), (3.2.13), (3.2.15) і (3.2.17) отримуємо вираз для повної потенціальної енергії:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{e=1}^E & \left[\int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} dV - \right. \\ & \left. - \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} dV - \right. \\ & \left. - \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \\ Z^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \right. \\ & \left. - \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS \right] - \{U\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Щоб мінімізувати величину Π , продиференціюємо вираз (3.2.18) по $\{U\}$ і прирівняємо результат до нуля.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \sum_{e=1}^E & \left[\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{U\} - \right. \\ & - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0\} dV - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \\ Z^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \\ & \left. - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS \right] - \{P\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Інтеграли у формулі (3.2.19) визначають для кожного елемента вектор навантажень $\{f^{(e)}\}$ і матрицю жорсткості $[k^{(e)}]$, які можна об'єднати наступним чином:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}] \{U\} + \{f^{(e)}\} \quad (3.2.20)$$

Тут $[k^{(e)}]$ – об'ємний інтеграл виду

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \quad (3.2.21)$$

а $\{f^{(e)}\}$ – сума декількох інтегралів:

$$\begin{aligned} [f^{(e)}] = & - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\Delta T^{(e)}\} dV - \\ & - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \\ Z^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS - \{P\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Матриця жорсткості елемента (3.2.21) не містить поверхневого інтегралу, який зустрічається в задачах теорії поля.

Глобальна матриця жорсткості $[K]$ і глобальний вектор-стовпець $\{F\}$ в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.2.23)$$

подаються співвідношеннями

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (3.2.24)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (3.2.25)$$

Плоскі (двовимірні) скінченні елементи

В плоских задачах застосовується трикутний симплекс-елемент з шістьма компонентами вузлових переміщень. Переміщення u та v всередині елемента подаються залежністю

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3.2.26)$$

Будемо вважати, що область, яка розглядається, розміщується в площині xu , і введемо наступні компоненти напруження і деформації: $\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}]$ та $\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]$. Для плоского напруженого стану, який зустрічається в багатьох тонких тілах, маємо: $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$. Компоненти тензора деформації γ_{yz} та γ_{xz} також дорівнюють нулю, але ε_{zz} відмінна від нуля і може

бути отримана із закону Гука, після того як будуть визначені $\{\sigma\}$ та $\{\varepsilon\}$. Плоский деформований стан має місце, коли компоненти деформації у напрямку осі z дорівнюють нулю ($\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Компоненти тензора напружень τ_{xy} та τ_{zx} також дорівнюють нулю при плоскій деформації, але σ_{zz} відмінна від нуля і обчислюється за допомогою закону Гука після того, як визначені $\{\sigma\}$ та $\{\varepsilon\}$.

Співвідношення зв'язку між деформаціями і переміщеннями у двовимірному випадку мають вигляд

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

або з урахуванням (3.2.26)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3.2.27)$$

Співвідношення (3.2.27) визначають матрицю градієнтів $[B]$, оскільки $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$. Для плоского напруженого стану маємо матрицю пружних характеристик $[D]$ і вектор початкових деформацій $\{\varepsilon_0\}$ мають вигляд

$$[D] = \frac{1}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad (3.2.28)$$

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.29)$$

У випадку плоскої деформації

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & 0 \\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu) \end{bmatrix}, \quad (3.2.30)$$

та

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\mu) \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.31)$$

Формули (3.2.28) – (3.2.31) відповідають ізотропному матеріалу з модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона μ .

Інтеграли, на основі яких складаються рівняння, що визначають елемент, легко обчислюються, оскільки матриці $[B]$ та $[D]$ містять лише константи. Тому об'ємний інтеграл, який представляє матрицю жорсткості має вигляд:

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_V dV, \\ [k^{(e)}] &= [B]^T [D] [B] tA \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

де t – товщина елемента, A – його площа.

В матричній формі об'ємний інтеграл від об'ємних сил має вигляд

$$\int_V \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dV = \frac{V}{3} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (3.2.33)$$

На основі співвідношень (3.2.32) та (3.2.33) будуються рівняння, які визначають трикутний скінченний елемент.

3.3. Реалізація методу скінченних елементів в Nastran

У програмному комплексі MSC.Nastran реалізовано варіант методу скінченних елементів, в якому шуканим є вектор переміщень.

У матричному позначенні це вектор:

$$\{U\} = \{U_1; U_2; U_3\}^T, \quad (3.3.1)$$

Розв'язок крайової задачі в об'ємі Ω (компоненти вектора переміщень) можна шукати у вигляді усіченого ряду:

$$U_n = U_n(\vec{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^B} (q_n)_m(t) \cdot \Phi_m(\vec{x}), \quad (3.3.2)$$

де $\Phi_m(\vec{x})$ є повна за енергією система лінійно незалежних базисних функцій; N^B - загальна їх кількість; $(q_n)_m(t)$ - шукані вузлові значення.

А відповідно до ідеології методу скінченних елементів вона визначається:

$$\Phi_m(\vec{x}) = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\vec{x}) \cdot \varphi_m^e(\vec{x}), \quad (3.3.3)$$

тут Λ_m - множина СЕ, що містить вузол з номером m ; $\varphi_m^e(\vec{x})$ - базисна функція скінченного елемента e (звичайно це інтерполяційний поліном), що відповідає вузлу m в межах об'єму СЕ Ω^e ;

Функція приналежності до СЕ (оператор інцидентності):

$$\chi^e(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in \Omega^e; \\ 0, & \vec{x} \notin \Omega^e. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Інакше кажучи, замість (3.3.2) маємо скінченно-елементну апроксимацію

$$U_n = U_n(\vec{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^U} (q_n)_m(t) \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\vec{x}) \cdot \varphi_m^e(\vec{x}), \quad (3.3.5)$$

де N^U - загальна кількість вузлів у тілі.

Оскільки для будь-якої точки в межах СЕ $\chi^e(\vec{x}) = 1$, то в межах СЕ $\Phi_m(\vec{x}) = \varphi_m^e(\vec{x})$.

За межами СЕ $\chi^e(\vec{x}) = 0$, тому в (3.3.4) фактично йде підсумування тільки по М вузлах того СЕ, у якому розташована розглянута точка з координатами $(\vec{x})$. Тому виводиться матриця базисних функцій СЕ $\{U\} = [\phi]\{q\}_e$

$$\{U\} = [\phi]\{q\}_e \quad (3.3.6)$$

де вектор переміщень у вузлах СЕ

$$\{q\}_e = \{(q_1, q_2, q_3)_1, \dots, (q_1, q_2, q_3)_m, \dots, (q_1, q_2, q_3)_M\}^T \quad (3.3.7),$$

у якому $(q_1, q_2, q_3)_m$ - переміщення m -го вузла СЕ; $m=1, 2, \dots, M$. Цей вектор є результатом вибірки значень переміщень $\{q\}_e$ у вузлах даного СЕ з глобального вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Оскільки в тривимірному випадку $\{U\}$ має розмірність 3×1 , а $\{q\}_e$ - $3M \times 1$, то розмірність матриці базисних функцій - $3 \times 3M$. Матриця $[\phi]$ - блочна:

$$[\phi] = [[\phi]_1, [\phi]_2, \dots, [\phi]_M], \quad (3.3.8)$$

у якій блок m -го вузла має вигляд:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \varphi_m^e & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_m^e & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_m^e \end{bmatrix}, \quad (3.3.9)$$

Для будь-якої точки тіла в межах СЕ вводяться вектори повних деформацій і напружень:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T, \quad (3.3.10)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T, \quad (3.3.11)$$

де $\gamma_{mn} = 2\varepsilon_{mn}$ при $m \neq n$, а також аналогічні в заповненні вектора пружних $\{\varepsilon^e\}$ деформацій.

Інший чисельний метод - *метод скінчених різниць* (МСР) полягає в тому, що область неперервної зміни аргументів шуканих функцій заміняють дискретною множиною точок – вузлів розрахункової сітки. Частинні похідні, які входять в досліджувану систему диференціальних рівнянь, замінюють скінченими різницями. При цьому диференціальні рівняння переходять в систему алгебраїчних рівнянь, шуканими в яких є значення шуканих функцій в вузлах сітки. Різницева задача ставиться так, щоб при зменшенні кроку сітки її розв'язок наближався до розв'язку диференціальної задачі, тобто процес обчислень збігався до точного розв'язку. Теоретичні основи МСР описано в монографії [110].

4. Лінійний динамічний аналіз перехідних процесів тришарових оболонкових структур

4.1. Дослідження динаміки тришарових оболонкових структур

Дослідження динаміки тришарових канонічних оболонкових структур (циліндричних, конічних та сферичних) і моделювання коливальних процесів в них, описаних у попередньому розділі хоч і теоретично обґрунтовують проблему, однак потребують чисельних результатів. Необхідним для цього є розв'язування конкретних задач динамічної поведінки симетричних і несиметричних шаруватих оболонок. Тому доцільно при виконанні досліджень провести чисельний аналіз крайових задач динамічного деформування циліндричних, конічних і сферичних оболонок з відрізняючимися геометричними і фізико-механічними параметрами структур, що знаходяться під дією різного нестационарного імпульсного навантаження.

Динамічний аналіз прямих перехідних процесів ґрунтується на розв'язанні основного рівняння

$$[M] \frac{d^2 \{q(t)\}}{dt^2} + [C] \frac{d \{q(t)\}}{dt} + [K] \{q(t)\} = \{P(t)\} + \{Q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (4.1.1)$$

або в іншому позначенні

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (4.1.2)$$

де

$[M]$ - глобальна матриця мас; $[K]$ - глобальна матриця жорсткості;

$[B]$ - матриця демпфірування.

Основне рівняння динамічного процесу інтегрується із застосуванням методу Ньюмарка. При безпосередньому розв'язуванні динамічного рівняння за цим методом у MSC.Nastran застосовується рекурентна тришарова схема другого порядку наближення, яка має вид:

$$\begin{aligned} &([M] + 0,5\Delta t_n [C] + (0,5\Delta t_n)^2 [K])\{q\}^{2n+2} = \\ &= 2([M] + (0,5\Delta t_n)^2 [K])\{q\}^{2n+1} - ([M]0,5\Delta t_n [C] + (0,5\Delta t_n)^2 [K])\{q\}^{(2n)} + \\ &+ (0,5\Delta t_n)^2 [\{f\}^{(2n+2)} + 2\{f\}^{(2n+1)} + \{f\}^{(2n)}], \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Щоб зберегти другий порядок на першому часовому кроці, обчислимо $\{q\}^{(1)}$ як результат розкладу в ряд Тейлора в околі $t=0$ на кроці Δt_n з потрібною точністю:

$$\{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \Delta t_n \{\dot{q}\}^0 + \Delta t_n^2 \{\ddot{q}\}^0 / 2 + O(\Delta t_n^3) \quad (4.1.4)$$

З початкових умов відомо, що $\{q\}^{(0)} = \{\bar{U}\}$ і $\{\dot{q}\}^{(0)} = \{\bar{q}\}$. Враховуючи, що згідно з основним рівнянням (4.1.1)

$$\{\ddot{q}\} = [M]^{-1} (-[C]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} + \{f\}), \quad (4.1.5)$$

з (4.1.4) отримаємо:

$$\{q\}^{(1)} = \{\bar{U}\} + \Delta t_n \{\bar{q}\} + \Delta t_n^2 [M]^{-1} (-[C]\{\bar{q}\} - [K]\{\bar{U}\} + \{f\}^{(0)}) / 2 + O(\Delta t_n^3) \quad (4.1.6)$$

або, якщо знехтувати членами другого порядку наближення:

$$\{q\}^{(1)} = \{\bar{U}\} + \Delta t_n \{\bar{q}\} + O(\Delta t_n^2) \quad (4.1.7)$$

Таким чином, перш ніж використати тришарову схему (4.1.3), необхідно насамперед застосувати один із виразів (4.1.6) чи (4.1.7), які на першому часовому кроці забезпечують другий та третій порядок наближення за часом. Для того, щоб можна було швидко обернути матрицю $[M]$, її звичайно при інтегруванні за формулою $[M]_e = \int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega$ діагоналізують. Хоча процес діагоналізації - наближений, застосування (4.1.6) дає підвищену точність $O(\Delta t_n^3)$ при відносно незначних затратах часу, що добре впливає на точність подальшого розв'язку.

4.2. Постановка і розв'язування задач динаміки тришарових циліндричних оболонкових структур

Сучасний стан дослідження динамічних процесів оболонкових структур свідчать про недостатність вирішеності цієї проблеми на існуючому етапі

досліджень. Це стосується більшості таких структур, їх різновидів і комбінацій. Здійснений прорив в цій галузі хоч і став результатом математичного моделювання коливальних процесів, відбуваючихся у цих структурах, і використання найбільш сучасних розрахункових методів, але, як свідчить практика, остаточне вирішення проблеми, потребує додаткових досліджень. Вдосконалення потребують як самі розрахункові моделі, так і особливості їх розрахунків. В цій ситуації доцільним представляється досвід чисельних розрахунків таких структур з врахуванням їх конструкційних особливостей [57, 112-115]. Ілюстрацією може бути постановка і розв'язання задачі динамічного деформування тришарової циліндричної оболонки з врахуванням таких вимог. Одним із її варіантів може бути визначення НДС тришарової оболонки, яка представляє собою симетричну пружну структуру, що складається (рис. 4.1) з внутрішнього (1) і зовнішнього (3) несучих шарів, полімерного заповнювача (2), армованого дискретними ребрами (4), і знаходиться під дією

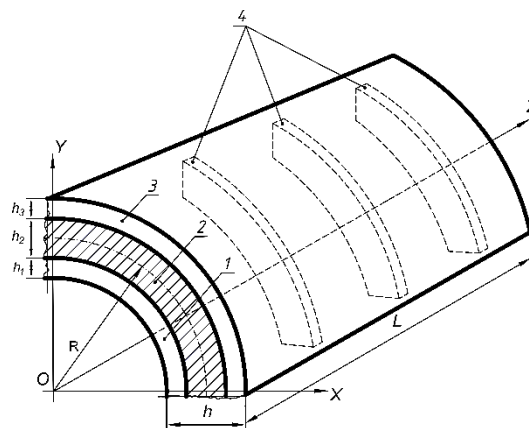


Рис. 4.1. Конструкція тришарової оболонки:

1 – внутрішній шар; 2 – заповнювач; 3 – зовнішній шар; 4 – армуючі ребра

внутрішнього імпульсного осесиметричного навантаження.

$$P_1 = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)] \quad (4.1.8)$$

де: A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульса навантаження, $T = R/c$, c – швидкість звуку у металі; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. В розрахунках приймалося

$$A = 10^6 \text{ Па}; \quad T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Па}.$$

Враховуючи неоднакові властивості матеріалів суміжних шарів досліджуваної неоднорідної оболонкової структури задачі її динамічного аналізу розв'язувалися скінченно-елементним методом [116]. Для виконання розрахунків була створена скінченно-елементна модель структури, приведена на рис. 4.2.

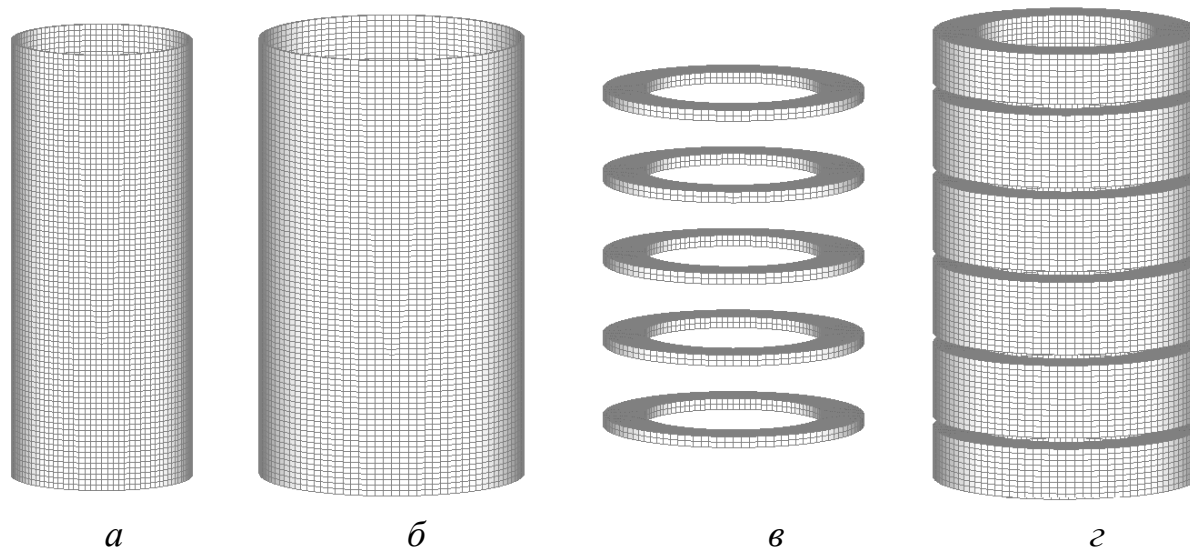


Рис. 4.2. Скінченно-елементна модель структури:

a – внутрішня несуча оболонка; *б* – зовнішня несуча оболонка; *в* – армируючі ребра; *г* – легкий заповнювач

Скінченно-елементна модель створювалася з використанням тривимірного об'ємного скінченного елемента типу *Solid*, який по критеріям якості: звуженню і викривленню, внутрішнім кутам та інших показниках, відповідав вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні [109]. Модель тришарової циліндричної структури налічувала: у внутрішній несучій оболонці 16000 елементів, у зовнішній – 16000, а в армуючих ребрах – 18000. Кількість скінченних елементів легкого заповнювача (пінопласту) дорівнювала 126000. Загальна кількість скінченних елементів у моделі складала 176000 елементів і 186300 вузлів.

У випадку несиметричної тришарової циліндричної оболонки з дискретним армованим заповнювачем по лініях кривизн оболонки, рівняння коливань мають

вид (2.2.18).

При жорсткому защемленні країв оболонки граничні умови при $x = 0$; $x = L$ (L - довжина оболонки) покладалися:

$$\begin{aligned} u_1^i(0, t) = u_3^i(0, t) &= 0; & i = 1, 2 \\ u_1^i(L, t) = u_3^i(L, t) &= 0; & i = 1, 2 \end{aligned}$$

Початкові умови приймалися нульовими:

$$\begin{aligned} u_1^i(x, 0) = \frac{\partial u_1^i(x, 0)}{\partial t} &= 0; & i = 1, 2 \\ u_3^i(x, 0) = \frac{\partial u_3^i(x, 0)}{\partial t} &= 0; & i = 1, 2 \end{aligned}$$

Розглядалися три випадки динамічної поведінки тришарової циліндричної оболонки під дією нестационарного навантаження в часовому інтервалі $0 \leq t \leq 40T$. Кожен з цих випадків включав два варіанти чисельних розрахунків показників напружено-деформованого стану при різних фізико-механічних параметрах легкого заповнювача: перший $E_l/E_t = 500$ і другий $E_l/E_t = 50$.

У першому випадку структура задавалась з наступними геометричними і фізико-механічними параметрами:

$h_1 = h_2 = 0,002\text{ м}$; $L/h_1 = 200$; $R = 0,18\text{ м}$; $R/h = 4,5$; $H_j/h_1 = 18$; $F_j = 3,6 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2$;
модулі пружності несучих шарів і армуючих ребер $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}\text{ Па}$;
коефіцієнт Пуассона $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,33$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$;

Параметри для легкого заповнювача були наступні: модуль пружності $E_t = 1,4 \cdot 10^8\text{ Па}$ і $E_t = 1,4 \cdot 10^9\text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,3$; щільність $\rho_t = 25\text{ кг/м}^3$;

Досліджувалась циліндрична симетрична тришарова оболонка з легким заповнювачем, навантажена внутрішнім імпульсним тиском.

Позначення індексів мали наступні значення: 1 - внутрішній несучий шар, t - легкий заповнювач, j - армуючі ребра, 2 - зовнішній несучий шар;

Розрахунки максимальних величин нормальних прогинів u_3 і нормальних напружень σ_{22} в серединній поверхні несучих шарів оболонки були проведені у

програмно-розрахунковому комплексі *Nastran* алгоритмом прямого перехідного динамічного процесу. Отримані результати представлені на рис. 4.3 - рис. 4.8. Також були визначені величини перших п'яти власних частот структур згідно метода Ланцоша [117].

На рис. 4.3а у наведеному масштабі показані порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих

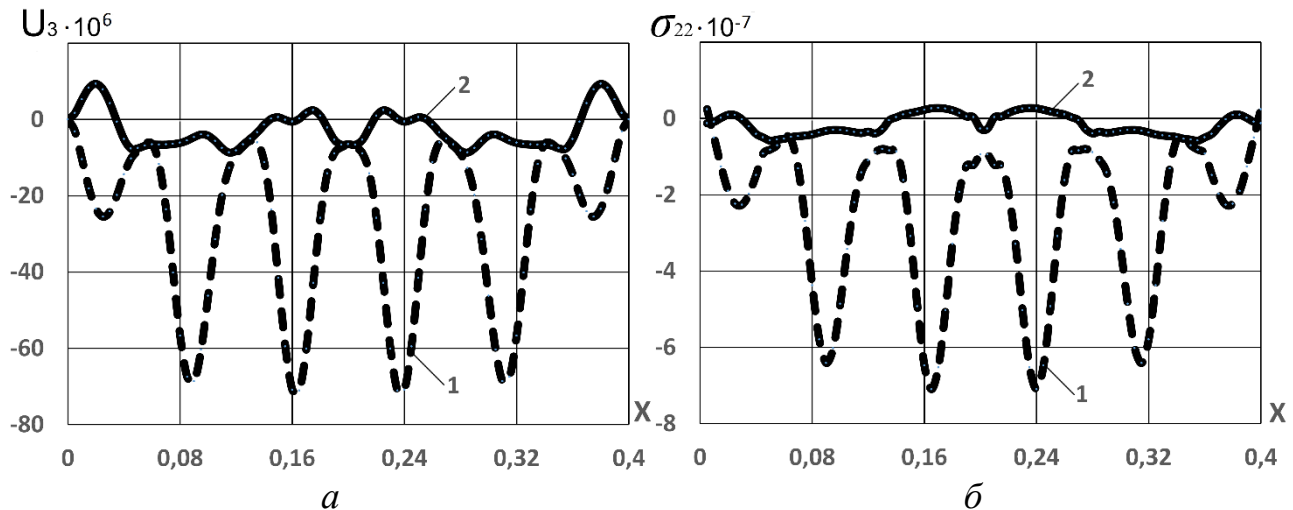


Рис. 4.3. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів при $E_{1,2}/E_t = 500$

шарів від просторової координати x в момент часу $t = 5,1T$ (у цей момент величини досягають максимального значення в розрахунковому інтервалі часу $0 \leq t \leq 40T$).

На цьому і подальших графіках крива з індексом 1 відповідає прогину u_3^1 внутрішнього шару, а з індексом 2 - u_3^2 зовнішнього шару. Дискретність розміщення армуючих ребер візуально спостерігається на рисунку - це ділянки максимального зближення кривих з індексами 1 і 2.

Перші п'ять власних частот цієї тришарової структури становлять:

$$f_1=1832.02 \text{ Гц}, f_2=1832.02 \text{ Гц}, f_3=2565.98 \text{ Гц}, f_4=2565.98 \text{ Гц}, f_5=2769.59 \text{ Гц}.$$

А на рис. 4.3б наведені відповідні графіки максимальних напружень σ_{22}^1 (1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 5,1T$.

На рис. 4.4а наведено порівняльні графіки максимальних прогинів

коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10,15T$. На рис. 4б наведені порівняльні графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$, $\sigma_{22}^2(2)$ в цей же момент часу. Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: $f_1=2097.90$ Гц, $f_2=2097.90$ Гц, $f_3=2976.79$ Гц, $f_4=3094.17$ Гц, $f_5=3094.17$ Гц.

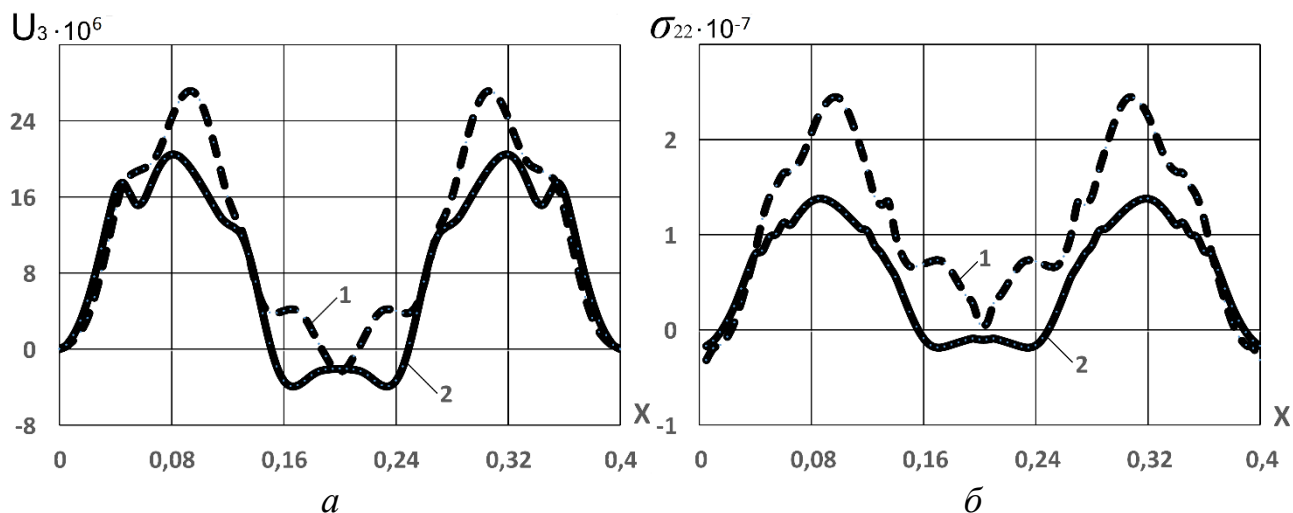


Рис. 4.4. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_{1,2}/E_t = 50$

З аналізу чисельних результатів характеристик напружено-деформованого стану в серединних поверхнях оболонкової структури однорідної симетричної конструкції в першому випадку (рис. 4.3а, 4.4а) максимальні прогини внутрішнього шару u_3^1 у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні прогини u_3^1 структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ майже в 2,62 рази, а максимальні прогини u_3^2 зовнішнього шару при відповідних варіантах – були меншими в 2,19 рази.

В той же час (рис. 4.3б, 4.4б) і максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару σ_{22}^1 у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні напруження σ_{22}^1 структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ майже в 2,7 рази, а максимальні напруження σ_{22}^2 зовнішнього шару при розгляді відповідних варіантів цього випадку були меншими приблизно в 2,5 рази.

У другому випадку при незмінній геометрії, структура оболонки мала наступні фізико-механічні параметри: $h_1 = h_2 = 0,002$ м; $L/h_1 = 200$; $R = 0,18$ м; $R/h = 4,5$;

$H_j / h_1 = 18$; $F_j = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; модулі пружності несучих шарів і армуючих ребер $E_1^1 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3$; питома вага $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$;

А параметри легкого заповнювача були наступні: модуль пружності

$E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$ і $E_t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,33$; питома вага $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$;

На рис. 4.5а наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової

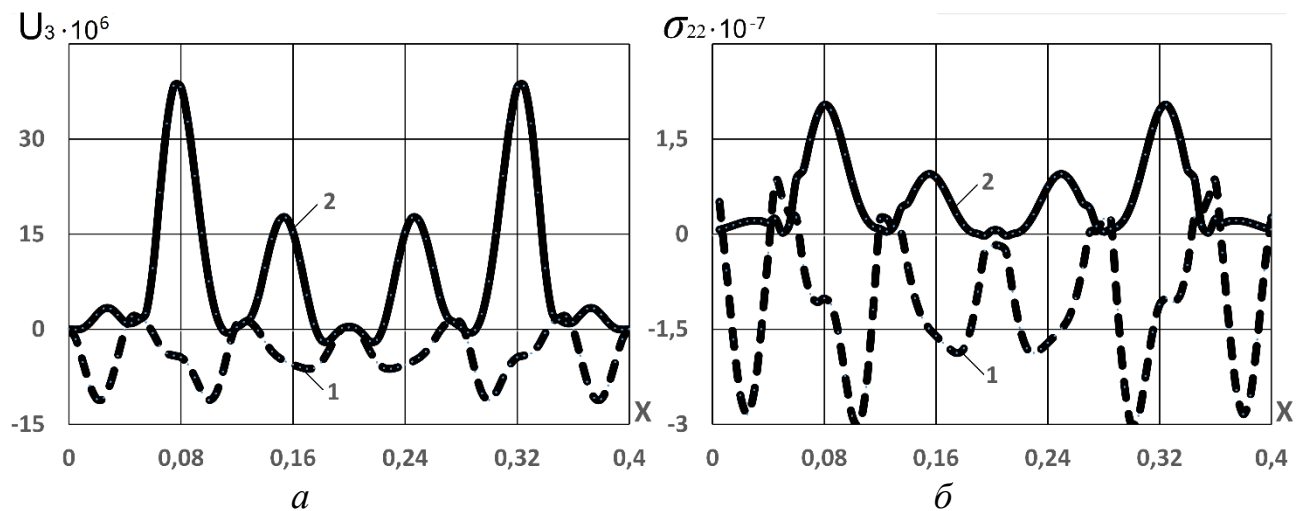


Рис. 4.5. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_2/E_t = 500$

координати x якщо $t = 10,85T$. В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_2/E_t = 500$. Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: $f_1 = 2047.02 \text{ Гц}$, $f_2 = 2047.02 \text{ Гц}$, $f_3 = 2484.98 \text{ Гц}$, $f_4 = 2484.98 \text{ Гц}$, $f_5 = 3007.01 \text{ Гц}$.

На рис. 4.5б наведені графіки максимальних напружень σ_{22}^1 (1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10,85T$.

На рис. 4.6а наведені графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10,7T$. В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_2/E_t = 50$. Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: $f_1 = 2241.24 \text{ Гц}$, $f_2 = 2241.24 \text{ Гц}$, $f_3 = 2997.92 \text{ Гц}$, $f_4 = 2997.93 \text{ Гц}$, $f_5 = 3167.35 \text{ Гц}$.

На рис. 4.6б наведені залежності максимальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$, $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10,7T$.

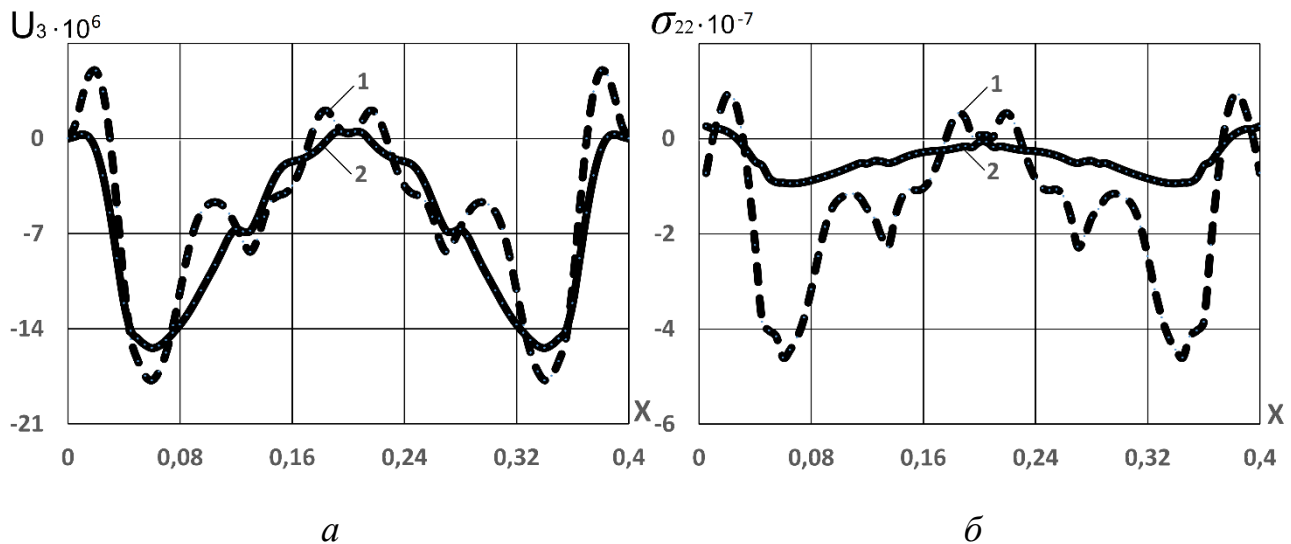


Рис. 4.6. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_2/E_1 = 50$

Аналізуючи отримані чисельні результати показників напружено-деформованого стану в серединних поверхнях несиметричної структури другого випадку (рис. 4.5а, 4.6а) видно, що максимальні прогини внутрішнього шару u_3^1 у варіанті співвідношення $E_2/E_1 = 500$ є меншими аналогічних прогинів u_3^1 структури при співвідношенні $E_2/E_1 = 50$ майже на 59%, а максимальні прогини u_3^2 зовнішнього шару, при розгляді відповідних варіантів цього випадку, перевищили майже в 2,5 рази аналогічні прогини u_3^1 структури при співвідношенні $E_2/E_1 = 50$.

Максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару σ_{22}^1 (рис. 4.5б, 4.6б) у варіанті співвідношення $E_1/E_2 = 500$ перевищили аналогічні напруження σ_{22}^1 структури при співвідношенні модулів $E_2/E_1 = 50$ майже на 50%, а максимальні напруження σ_{22}^2 зовнішнього шару при розгляді відповідних варіантів цього випадку були більшими у 2,25 рази.

У останньому випадку геометричні і фізико-механічні параметрами структури становили: $h_1 = 0,004\text{м}$; $h_2 = 0,002\text{м}$; $L/h_1 = 200$; $R = 0,18\text{м}$; $R/h = 4,5$; $H_j/h_1 = 17$;

$F_j = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; модулі пружності несучих шарів і армуючих ребер $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3$; питома вага $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$;

Параметри легкого заповнювача були наступними: модуль пружності $E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$ і $E_t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,33$; щільність $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$;

На рис. 4.7а наведені графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент

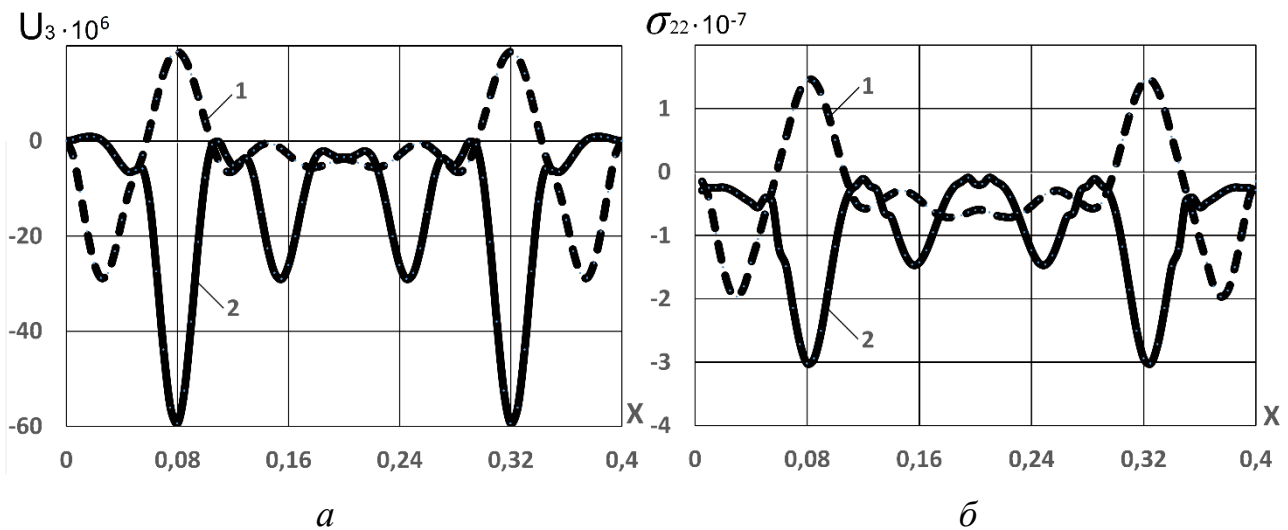


Рис. 4.7. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_1/E_t = 500$

часу $t = 8,5T$. В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_1/E_t = 500$.

Перші п'ять власних частот цієї тришарової структури становлять:

$$f_1=2002.54 \text{ Гц}, f_2=2002.54 \text{ Гц}, f_3=2580.19 \text{ Гц}, f_4=2580.19 \text{ Гц}, f_5= 2945.29 \text{ Гц}.$$

На рис. 4.7б наведені графіки максимальних напружень σ_{22}^1 (1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 8,5T$.

На рис. 4.8а наведені графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 4,5T$. В цьому варіанті структури співвідношення модулів пружності складає $E_{1,2}/E_t=50$.

Перші п'ять власних частот цієї тришарової структури становлять:

$$f_1=2217.80 \text{ Гц}, f_2=2217.80 \text{ Гц}, f_3= 3061.14 \text{ Гц}, f_4= 3061.14 \text{ Гц}, f_5= 3118.39 \text{ Гц}.$$

На рис. 4.8б наведені графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$, $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 4,5T$.

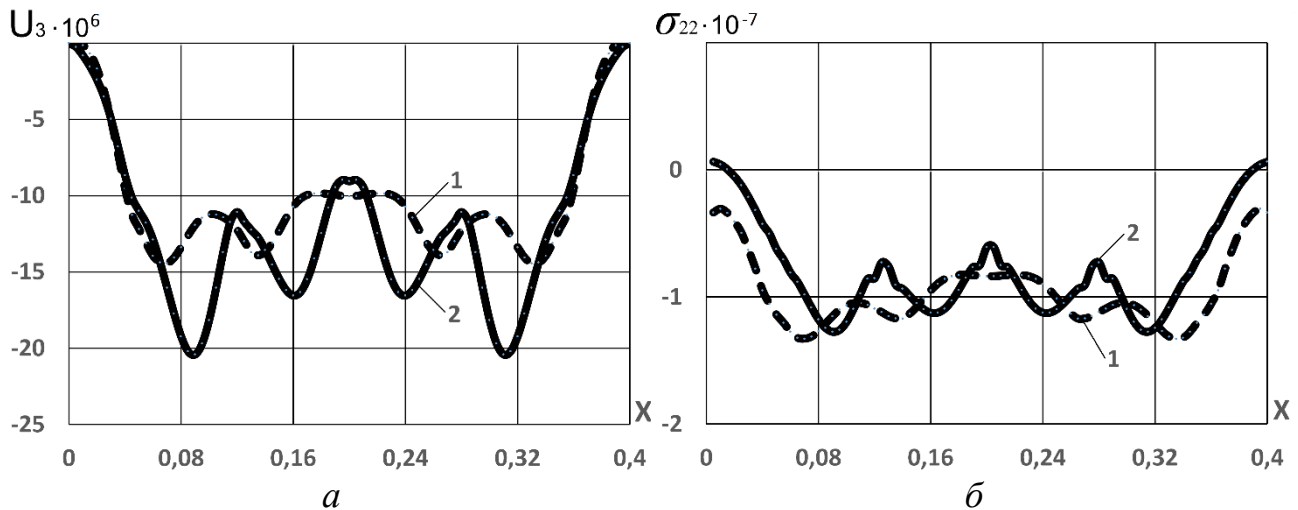


Рис. 4.8. Максимальні прогини u_3^1 ; u_3^2 (а) і напруження σ_{22}^1 ; σ_{22}^2 (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_1/E_t = 50$

Аналіз отриманих результатів дослідження напружено-деформованого стану в серединних поверхнях несиметричної за товщиною несучих шарів тришарової структури останнього випадку (рис. 4.7а, 4.8а) показує, що у варіанті оболонки з співвідношенням $E_{1,2}/E_t = 500$ більшими за величиною були максимальні прогини зовнішнього шару u_3^2 по відношенню до внутрішнього шару u_3^1 оболонки.

Порівнюючи показники характеристик НДС варіантів структур з різною пружністю заповнювача видно, що при $E_{1,2}/E_t = 500$ максимальні прогини зовнішнього шару u_3^2 перевищили аналогічні прогини u_3^1 структури з заповнювачем $E_{1,2}/E_t = 50$ в 2,9 рази, при цьому максимальні прогини u_3^1 внутрішніх шарів у даних варіантах відрізнялися в 2 рази.

Максимальні нормальні напруження внутрішнього шару σ_{22}^1 (рис. 4.7б, 4.8б) при співвідношенні $E_{1,2}/E_t = 500$ перевищили аналогічні напруження σ_{22}^1 структури співвідношенням $E_{1,2}/E_t = 50$ в 1,6 раз, а максимальні напруження σ_{22}^2 зовнішнього шару першого варіанту перевищили аналогічні напруження σ_{22}^2 зовнішнього

шару другого варіанту структури майже у 2,4 рази.

Отже, загальною тенденцією всіх розглянутих випадків дослідження динаміки тришарової циліндричної оболонкової структури виявилось значне реагування нею на зміну модуля пружності легкого заповнювача, величина якого істотно впливає на її характер коливань [113-115].

Висновок. Отже вплив геометричних параметрів і фізико-механічних властивостей матеріалу несучих шарів тришарових *циліндричних оболонкових структур* на їх напружено-деформований стан при осесиметричному внутрішньому нестационарному навантаженні має суттєве значення. При аналізі елементів пружних структур використано модель теорії оболонок та стрижнів Тимошенко. Чисельні розрахунки максимальних величин нормальних прогинів u_3 і нормальних напружень σ_{22} в серединних поверхнях несучих шарів оболонок, отримані скінченно-елементним методом, показують що параметри геометрії несучих шарів структури, фізико-механічні властивості їх матеріалу і пружність заповнювача значно впливають на динаміку коливальних процесів циліндричних оболонкових структур.

Таким чином, змінюючи матеріал шаруватого пакету циліндричної оболонки, товщину несучих шарів і пружність заповнювача можна підібрати конструкцію структури з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні.

4.2. Задачі динаміки тришарових кінцевих оболонкових структур

Характерною ілюстрацією може бути постановка і розв'язання задачі динамічного деформування кінцевої шаруватої оболонки. Одним із її варіантів може бути визначення НДС тришарової оболонки, яка представляє собою пружну структуру, що складається (рис. 4.9) з внутрішнього (1) і зовнішнього (3) несучих шарів, полімерного заповнювача (2), армованого ребрами. Розподіл імпульсного навантаження P_1 здійснювався:

$$P_1(t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$$

де: A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульсу навантаження;
 $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В розрахунках приймалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ Па.

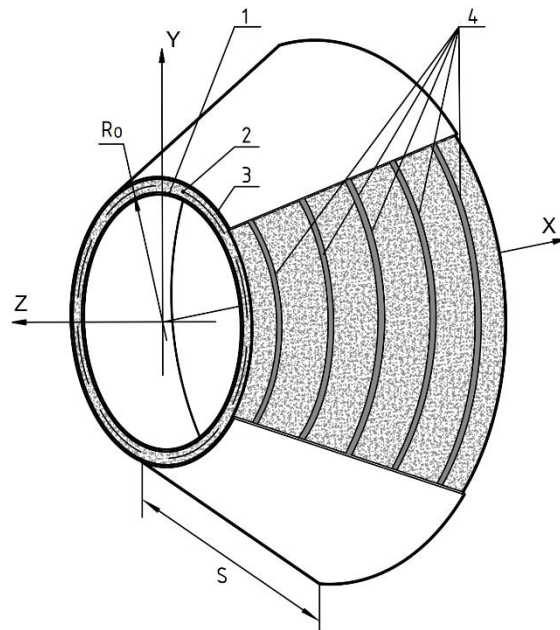


Рис. 4.9. Конструкція тришарової оболонки:

1 – внутрішній шар; 2 – заповнювач; 3 – зовнішній шар; 4 – армуючі ребра

Рівняння коливань несиметричної тришарової конічної оболонки з легким дискретно-симетричним заповнювачем, армованим дискретними ребрами мають вид (2.2.18).

Враховуючи неоднаковість властивостей матеріалів суміжних шарів досліджуваної неоднорідної оболонкової структури задачі її динамічного аналізу розв’язувалися скінченно-елементним методом. Для виконання розрахунків була створена скінченно-елементна модель структури, приведена на рис. 4.10.

Скінченно-елементна модель створювалася з використанням тривимірного об’ємного скінченного елемент типу *Solid*, який по критеріям якості: звуженню і викривленню, внутрішнім кутам та інших показниках, відповідав вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні [109]. Модель тришарової конічної структури налічувала у внутрішній несучій оболонці 11232

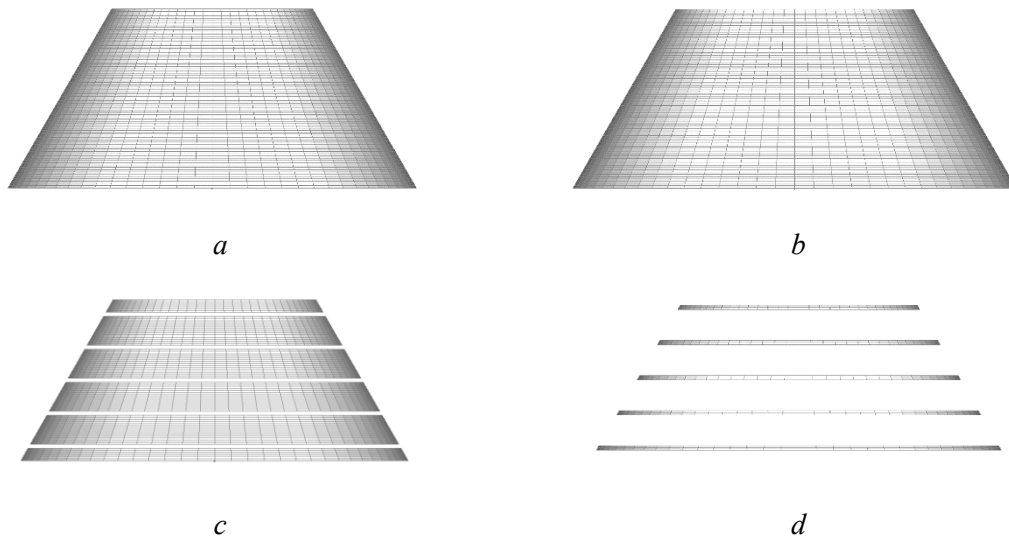


Рис. 4.10. Скінченно-елементна модель тришарової конічної оболонки:

a - внутрішня несуча оболонка; *б* - зовнішня несуча оболонка;

в - армуючі ребра; *г* - легкий заповнювач

елементів, у зовнішній – 11232, а в армуючих ребрах – 1440. Кількість скінченних елементів легкого заповнювача дорівнювала 9792. Загальна кількість скінченних елементів у моделі складала 33696 елементів і 39817 вузлів.

Армуючі ребра були розташовані в наступних точках:

$$s_j = [6 + (k-1)16] \cdot \Delta s, k = \overline{1,5}, \Delta s = (s_N - s_0) / 80; (s_N - s_0) = 0,39 \text{ м}$$

Розглядалися три випадки динамічної поведінки тришарової конічної оболонки при нестационарному навантаженні в часовому інтервалі $0 \leq t \leq 40T$. Кожен з цих випадків, як і при дослідженні циліндричної структури, включав два варіанти чисельних розрахунків показників напружено-деформованого стану при різних фізико-механічних параметрах легкого заповнювача ($E_1/E_t = 500$ і $E_1/E_t = 50$).

У першому випадку структура мала наступні геометричні і фізико-механічні параметрами:

$$h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; S_N = 0,39 \text{ м}; R_0 = 0,205 \text{ м}; R_0 / h_1 = 102,5; H_j / h_1 = 10; \alpha = \pi / 6;$$

$$F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \text{модулі пружності несучих шарів і ребер } E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\text{коефіцієнт Пуассона } \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,33; \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

Параметри показників легкого заповнювача мають наступні значення:

модуль пружності $E_t = 1,4 \cdot 10^8$ Па і $E_t = 1,4 \cdot 10^9$ Па; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,3$;
питома вага $\rho_t = 25$ кг/м³;

Таким чином досліджувались конічні тришарові оболонки з легким заповнювачем, навантажені внутрішнім імпульсним тиском P_1 .

Розрахунки максимальних величин нормальних прогинів u_3 і нормальних напружень σ_{22} в серединній поверхні несучих шарів оболонки були проведені у програмно-розрахунковому комплексі *Nastran* алгоритмом прямого перехідного динамічного процесу. Отримані результати представлені на рис. 4.11 - рис. 4.16. Визначені величини перших п'яти власних частот структур виконувалося згідно методу Ланцоша [117].

На рис. 4.11а у наведеному масштабі показані порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 7,35T$. На цьому і

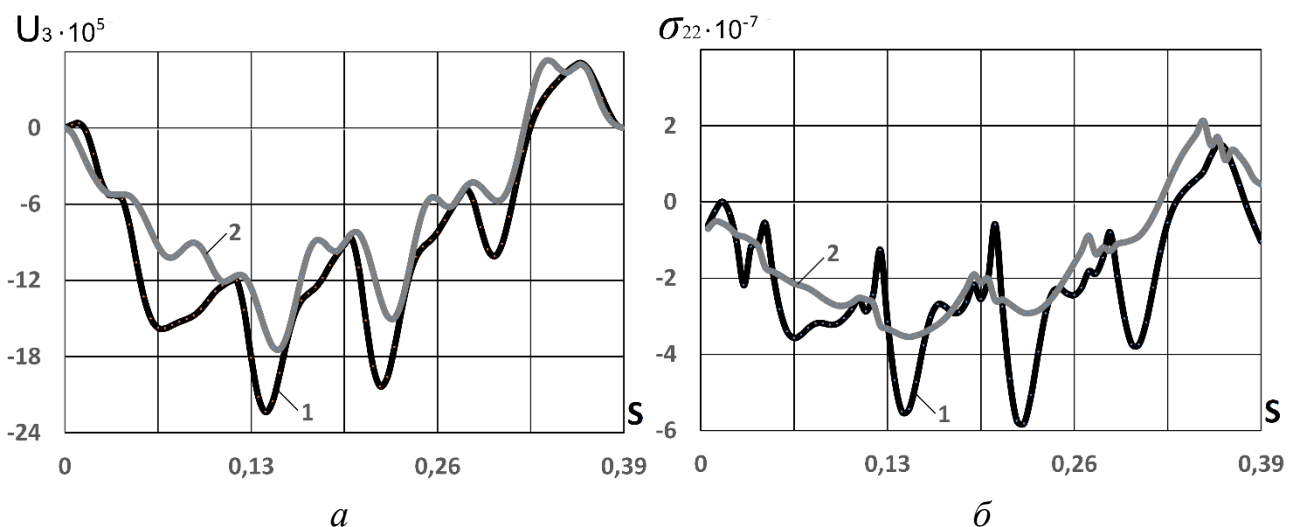


Рис. 4.11. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в
серединній поверхні несучих шарів якщо $E_{1,2}/E_t = 500$

подальших рисунках крива з індексом 1 відповідає прогину u_3^1 внутрішнього шару, а з індексом 2 - u_3^2 зовнішнього шару. Дискретність розміщення армуючих ребер візуально спостерігається на рисунку - це ділянки максимального зближення кривих з індексами 1 і 2.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури у цьому випадку становлять: $f_1 = 1142.62$ Гц, $f_2 = 1144.18$ Гц, $f_3 = 1276.16$ Гц, $f_4 = 1279.55$ Гц,

$$f_5 = 1309.46 \text{ Гц.}$$

На рис. 4.11б наведені порівняльні графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1(I)$, $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 7,35T$.

На рис. 4.12а наведено порівняльні графіки максимальних прогинів

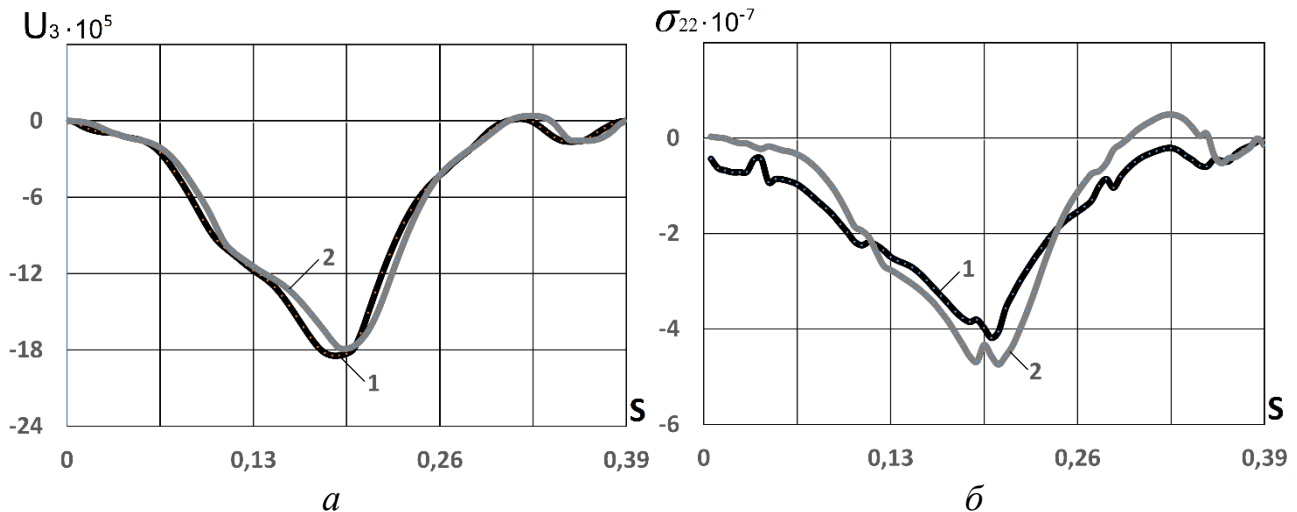


Рис. 4.12. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в
серединній поверхні несучих шарів якщо $E_{1,2}/E_t = 50$

коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 6,75T$.

А на рис. 4.12б - графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1(I)$ $\sigma_{22}^2(2)$ в цей же момент часу.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять:

$$f_1 = 1423.71 \text{ Гц, } f_2 = 1424.55 \text{ Гц, } f_3 = 1505.13 \text{ Гц, } f_4 = 1505.80 \text{ Гц, } f_5 = 1640.96 \text{ Гц.}$$

З аналізу чисельних результатів напружено-деформованого стану в серединних поверхнях однорідної оболонкової структури симетричної конструкції в першому випадку (рис. 4.11а, 4.12а) максимальні прогини внутрішнього шару u_3^1 у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні прогини u_3^1 структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ на 21%, а максимальні прогини u_3^2 зовнішнього шару при відповідних варіантах – були майже однакові.

В той же час (рис. 4.11б, 4.12б) і максимальні величини нормального

напруження внутрішнього шару σ_{22}^1 у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ були меншими аналогічних напружень σ_{22}^1 структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ майже в 2,4 рази, а максимальні напруження σ_{22}^2 зовнішнього шару при розгляді відповідних варіантів цього випадку були більшими приблизно в 1,5 рази.

У другому випадку при незмінній геометрії, структура оболонки мала наступні фізико-механічні параметри: $h_1 = h_2 = 0,002$ м; $S_N = 0,39$ м; $R_0 = 0,205$ м; $R_0/h_1 = 102,5$; $H_j/h_1 = 10$; $\alpha = \pi/6$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; модулі пружності несучих шарів і армуючих ребер $E_1^1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; коефіцієнт Пуассона $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,33$; $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³;

Параметри для легкого заповнювача були наступні: модуль пружності $E_t = 1,4 \cdot 10^8$ Па і $E_t = 1,4 \cdot 10^9$ Па; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,3$; питома вага $\rho_t = 25$ кг/м³;

На рис. 4.13а зображені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент якщо $t = 2,2T$. В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_2/E_t = 500$. Крива з індексом 1 відповідає прогину u_3^1 внутрішнього шару, а з індексом 2 - u_3^2 зовнішнього шару. Перші п'ять власних частот даної кінчної тришарової структури становлять: $f_1 = 1201.38$ Гц, $f_2 = 1203.64$ Гц, $f_3 = 1307.16$ Гц, $f_4 = 1307.32$ Гц, $f_5 = 1380.21$ Гц.

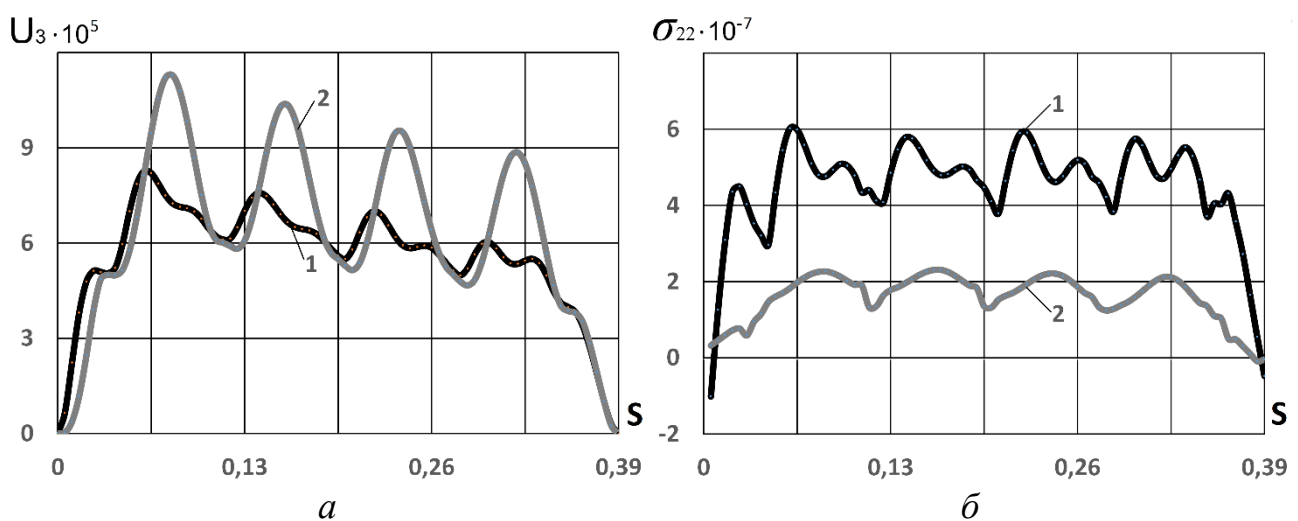


Рис. 4.13. Максимальні прогини u_3^1 ; u_3^2 (а) і напруження σ_{22}^1 ; σ_{22}^2 (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_2/E_t = 500$

А на рис. 4.13б наведені порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^1

(1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в той же момент часу $t = 2,2T$.

На рис. 4.14а наведені графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10,35T$.

В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_2/E_t = 50$.

На рис. 4.14б наведені графіки максимальних напружень σ_{22}^1 (1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10,35T$.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять:

$f_1 = 1426.881$ Гц, $f_2 = 1427.34$ Гц, $f_3 = 1551.82$ Гц, $f_4 = 1555.17$ Гц, $f_5 = 1594.09$ Гц.

З аналізу отриманих чисельних результатів показників напружено-деформованого стану в серединних поверхнях несиметричної структури другого випадку (рис. 4.13а, 4.14а) видно, що максимальні прогини внутрішнього шару u_3^1 у варіанті співвідношення $E_2/E_t = 500$ перевищили аналогічні прогини u_3^1 структури при співвідношенні $E_2/E_t = 50$ майже в 7,4 рази, а максимальні прогини u_3^2 зовнішнього шару, і аналогічні прогини u_3^1 при співвідношенні $E_2/E_t = 50$ у відповідних варіантах цього випадку були майже однакові.

Максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару σ_{22}^1 (рис. 4.13б, 4.14б) у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ були меншими аналогічних напружень σ_{22}^1 структури при співвідношенні модулів $E_2/E_t = 50$ майже на 25%, а максимальні напруження σ_{22}^2 зовнішнього шару при розгляді відповідних варіантів цього випадку були меншими на 26, 7 %.

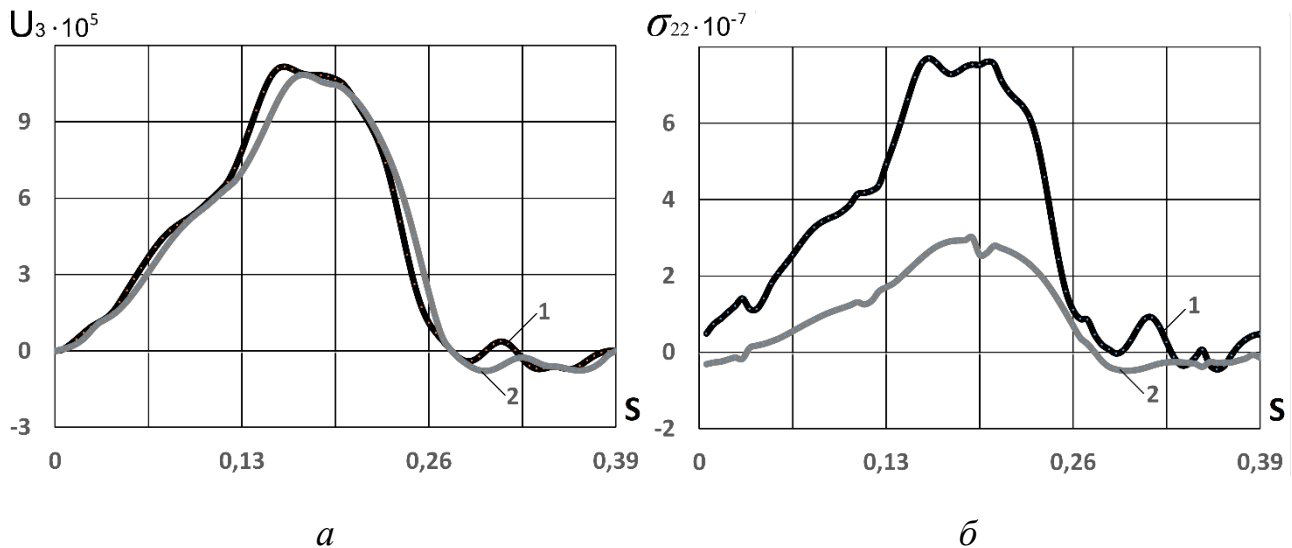


Рис. 4.14. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $E_2/E_t = 50$

У останньому випадку досліджень геометричні і фізико-механічні параметрами структури становили: $h_1 = 0,004\text{м}$; $h_2 = 0,002\text{м}$; $S_N = 0,39\text{м}$; $R_0 = 0,205\text{м}$; $R_0 / h_1 = 102,5$; $H_j / h_1 = 10$; $\alpha = \pi / 6$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}\text{м}^2$; модулі пружності несучих шарів і армуючих ребер $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}\text{Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,33$; питома вага $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3\text{кг/м}^3$; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3\text{кг/м}^3$; Параметри легкого заповнювача були наступні: модуль пружності $E_t = 1,4 \cdot 10^8\text{Па}$ і $E_t = 1,4 \cdot 10^9\text{Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,3$; питома вага $\rho_t = 25\text{кг/м}^3$;

На рис. 4.15а наведені графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 6,2T$. В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_1/E_t = 500$.

Перші п'ять власних частот цієї конічної тришарової структури становлять:
 $f_1 = 1182.22\text{Гц}$, $f_2 = 1182.22\text{Гц}$, $f_3 = 1318.26\text{Гц}$, $f_4 = 1318.27\text{Гц}$, $f_5 = 1345.08\text{Гц}$.

На рис. 4.15б наведені графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1(I)$, $\sigma_{22}^2(2)$

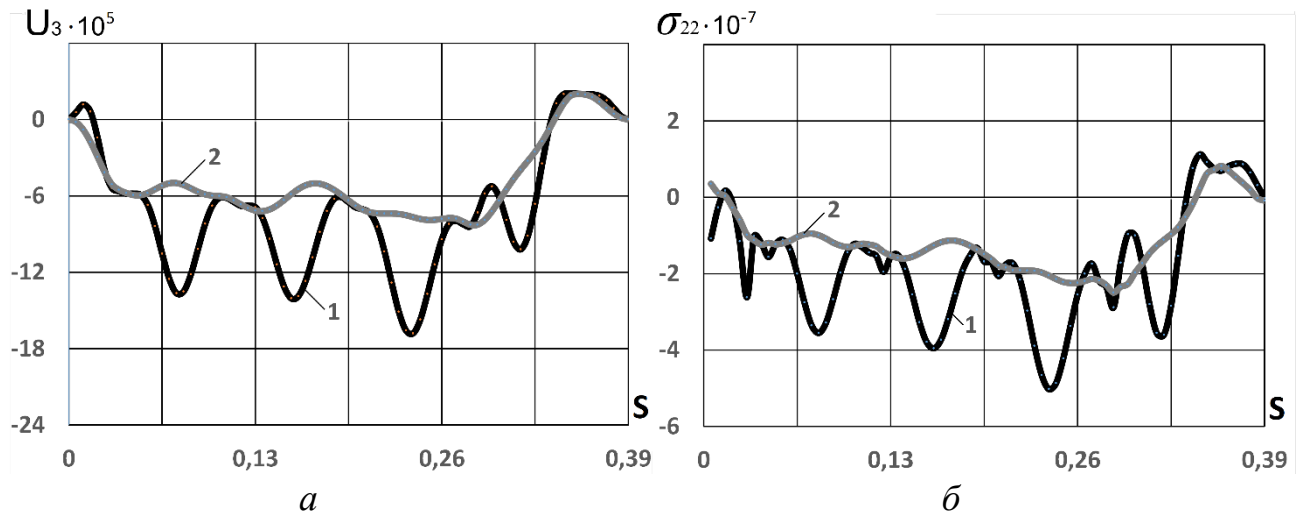


Рис. 4.15. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в
серединній поверхні несучих шарів якщо $E_1/E_t = 500$

в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент
часу $t = 6,2T$.

На рис. 4.16а наведені графіки максимальних прогинів коливальних процесів

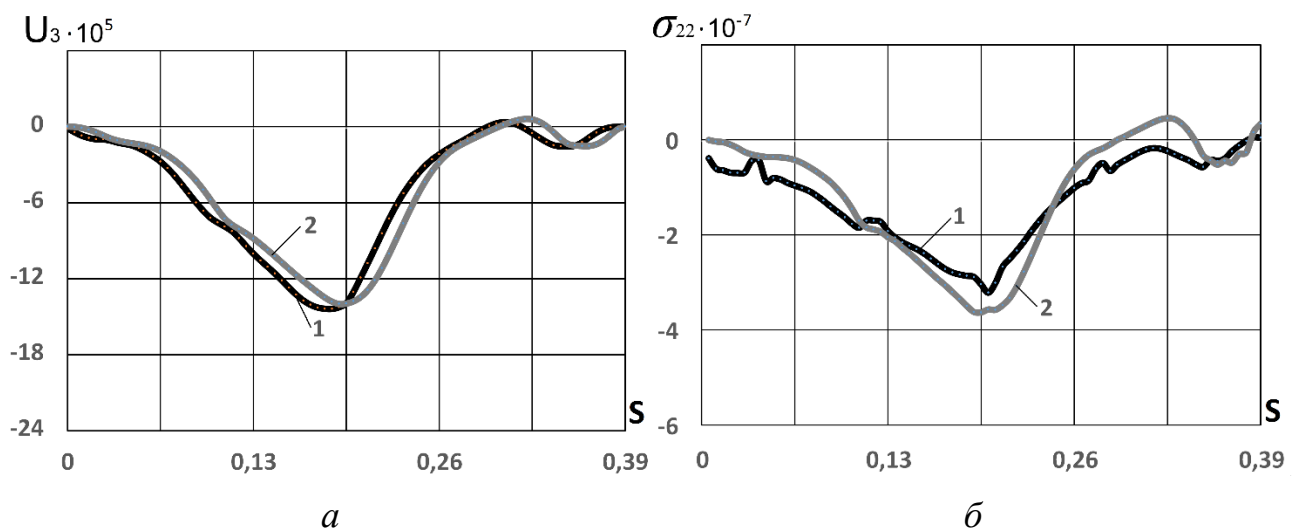


Рис. 4.16. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній
поверхні несучих шарів якщо $E_1/E_t = 50$

у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент
часу $t = 6,75T$ В цьому варіанті структури співвідношення модулів пружності
складає $E_{1,2}/E_t = 50$.

Перші п'ять власних частот цієї тришарової структури становлять:

$$f_1=1413.87 \text{ Гц}, f_2=1413.873 \text{ Гц}, f_3= 1525.52 \text{ Гц}, f_4= 1525.52 \text{ Гц}, f_5= 1599.23 \text{ Гц}.$$

На рис. 4.16б наведені графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1(I)$, $\sigma_{22}^2(2)$ в

серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 6,75T$.

Як показує аналіз отриманих результатів дослідження напружено-деформованого стану в серединних поверхнях несиметричної за товщинами несучих шарів тришарової структури останнього випадку (рис. 4.15а, 4.16а) показує, що у варіанті оболонки з співвідношенням $E_{1,2}/E_t = 500$ більшими за величиною виявились максимальні прогини зовнішнього шару u_3^2 по відношенню до внутрішнього шару u_3^1 оболонки. А у варіанті оболонки з співвідношенням $E_{1,2}/E_t = 50$ максимальні прогини несучих шарів відрізнялися не значно.

Порівнюючи показники характеристик НДС варіантів структур з різною пружністю заповнювача видно, якщо $E_{1,2}/E_t = 500$ максимальні прогини зовнішнього шару u_3^2 перевищили аналогічні прогини u_3^1 структури з заповнювачем $E_{1,2}/E_t = 50$ на 14%, при цьому максимальні прогини u_3^1 внутрішніх шарів у даних варіантах відрізнялися в 1,7 рази.

Максимальні нормальні напруження внутрішнього шару σ_{22}^1 (рис. 4.15б, 4.16б) при співвідношенні $E_{1,2}/E_t = 500$ перевищували аналогічні напруження σ_{22}^1 структури співвідношенням $E_{1,2}/E_t = 50$ майже в 1,6 рази, а максимальні напруження σ_{22}^2 зовнішнього шару першого варіанту були менше аналогічних напружень σ_{22}^2 зовнішнього шару другого варіанту структури у 1,4 рази.

Таким чином, дослідження зміни фізико-механічних параметрів несучих шарів нестационарних коливань симетричних і несиметричних тришарових кінцевих оболонок обертання, виявили істотну зміну їх динамічної поведінки.

Висновок. Установлено вплив товщини окремих шарів пакету, параметрів їх фізико-механічних властивостей і пружності полімерного заповнювача на напружено-деформований стан тришарової кінцевої оболонкової структури при осесиметричному внутрішньому нестационарному навантаженні.

Чисельні розрахунки дослідження максимальних величин нормальних прогинів u_3 і нормальних напружень σ_{22} в серединних поверхнях несучих шарів

оболонки, виконані скінченно-елементним методом, свідчать, що параметри пружності легкого заповнювача значно впливають на характер коливальних процесів конічних оболонкових структур.

4.4. Моделювання динамічних процесів півсферичних тришарових оболонкових структур

Тришарова півсферична оболонка із полімерним заповнювачем, армований дискретно симетричними ребрами, представляє собою пружну структуру, конструкційний пакет якої складається (рис. 4.17) з внутрішнього (1), зовнішнього (2) несучих шарів, полімерного заповнювача (3) і набору ребер жорсткості (4). Півсфера налічує п'ять ребер, розташованих в точках згідно залежності:

$$\alpha_k = k * \Delta\alpha, \quad k = \overline{1,5}, \quad \Delta\alpha = \frac{\pi}{12}$$

Оболонка має постійну загальну товщину h і розглядається в системі

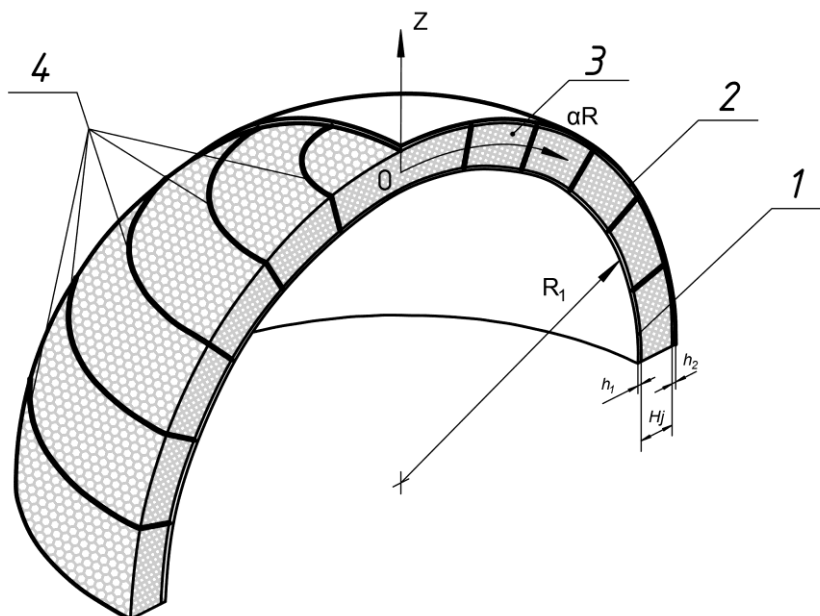


Рис. 4.17. Конструкція тришарової півсферичної оболонки із полімерним заповнювачем армованим ребрами жорсткості: 1 – внутрішній шар; 2 – зовнішній шар; 3 – полімерний заповнювач; 4 – армуючі ребра

координат α, z . Координатна лінія αR серединної поверхні цієї оболонки є коловою, а z - пряма лінія, ортогональна до серединної поверхні. Несучі шари оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами, простір між якими заповнено полімерним заповнювачем. Деформований стан внутрішнього і зовнішнього несучих шарів визначається через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_s^1, u_z^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_s^2, u_z^2, \varphi_1^2)^T$. А переміщення легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\bar{U}_t = (u_s^t, u_z^t, \varphi_1^t)^T$ згідно обчислювальної моделі.

На основі теорії деформації зсуву [106] в оболонках переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку α (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_i \varphi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

Вирази для переміщень легкого заповнювача записуються згідно моделі:

$$\begin{aligned} u_1^t(s, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) &= u_{03}^t(s, t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рівняння руху для несучих шарів, ребер і легкого заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського і має вид (2.4.16).

Дослідження динаміки неоднорідних шаруватих оболонок показали значну роль в цьому процесі геометричних параметрів і фізико-механічних властивостей елементів їх шаруватого пакету. Вплив цих конструктивних особливостей на НДС структури був проаналізований і в наступних дослідженнях динаміки цієї оболонки. Аналізувалось три варіанти оболонки (табл. 4.1). В кожному з яких розглядалося два випадки використання полімерного заповнювача різної пружності ($E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$ та $E_t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$). Конструкція оболонки мала півсферичну форму жорстко закріплену по екватору.

Таблиця 4.1

Досліджувані варіанти структури оболонки

Варіант оболонкової структури	Товщина несучого шару, (м)		Матеріал несучого шару	
	внутрішнього	зовнішнього	внутрішнього	зовнішнього
1	0,002	0,002	алюміній	алюміній
2	0,002	0,002	алюміній	сталь
3	0,002	0,004	алюміній	алюміній

Досліджувалось динамічне деформування цієї структури при дії на неї внутрішнього нестационарного навантаження. Всі розглянуті варіанти структури досліджувалися при однакових параметрах такого навантаження:

$$P_1(t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де: A – амплітуда імпульсного навантаження;

T – тривалість часу навантаження; t – часовий інтервал;

$\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В дослідженнях приймалися параметри: $A = 1 \text{ МПа}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

В кожному досліджуваному варіанті аналізувався розподіл по просторовій координаті α максимальних величин характеристик НДС: нормальних прогинів $(u_3^1; u_3^2)$ і нормальних напружень $(\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2)$ несучих шарів структур. В процесі аналізу, отримані результати порівнювались в кожному варіанті структури.

Результати розрахунків. Враховуючи різні фізико-механічні властивості несучих шарів і полімерного заповнювача, в наведеній роботі розрахунки показників напружено-деформованого стану структур здійснювались скінченно-елементним методом, включаючим створіння адекватної скінченно-елементної моделі (рис. 4.18).

Адекватність моделі підтверджувалась критеріями якості скінченно-елементної сітки програмного комплексу *Nastran* [109]. При створенні моделі використано тривимірний скінченний елемент типу *Solid*. Загальна кількість таких елементів становила 233100, а кількість вузлів дорівнює 266408. В окремих

варіантах моделі кількість скінченних елементів обох несучих шарів становить 33300, а полімерного заповнювача - 63600. У ребрах жорсткості їх кількість налічувала 3000 елементів.

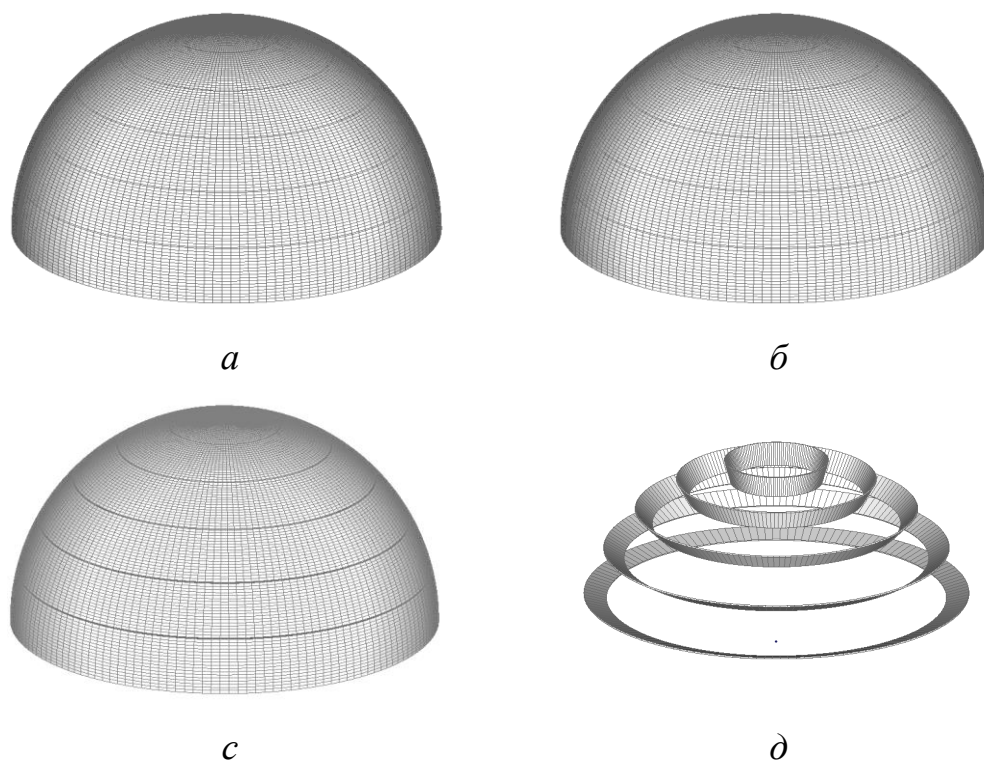


Рис. 4.18 Скінченно-елементна модель тришарової півсферичної оболонки:

a – внутрішня несуча обшивка; *б* – теж саме зовнішня;
с – полімерний заповнювач; *д* – армуючі ребра

Розрахунки виконувались у програмно-розрахунковому середовищі *Fimar with NX Nastran* алгоритмом прямого перехідного динамічного процесу. Часовий інтервал відповідав $0 \leq t \leq 40T$. Величини п'яти перших власних частот обчислювались методом Ланцоша [117].

Сама модель відображала зв'язок потенціальної енергії деформацій з потенціалом прикладеного навантаження [116]:

$$\Pi = E + W, \quad (4.4.1)$$

де: E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал зовнішніх навантажень.

Після розбивки цільної області на окремі елементи має вид:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)} \quad (4.4.2)$$

Глобальна матриця жорсткості $[K]$ і глобальний вектор-стовпець $\{F\}$ в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4.4.3)$$

відповідають співвідношенням:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (4.4.4)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (4.4.5)$$

В першому варіанті структури: відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача становило: $E_{1,2} / E_t = 500$; $E_{1,2} / E_t = 50$; $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $h_1 = 0,002 \text{ м}$; $h_2 = 0,002 \text{ м}$; $H_j = 10h_2$; $R_1 = 0,3$; $h / R_1 = 0,08$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$.

А фізико-механічні параметри полімерного заповнювача були наступними: $E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$; $E_t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $\rho_t = 25 \text{ кг} / \text{м}^3$; $\nu_t = 0,33$. Маса заповнювача складає 0,299 кг, армуючих ребер - 0,719 кг. А загальна маса всієї сферичної структури становить 7,632 кг.

На рис. 4.19а наведено залежності максимальних величин прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 (1) і зовнішнього несучого шару u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α , при $t = 10T$ (час досягнення максимального значення величин прогинів). Полімерний заповнювач відповідав співвідношенню пружності $E_{1,2} / E_t = 500$. В цьому варіанті структури і на рис. 4.20 - 4.28: криві 1 відповідають величинам внутрішнього несучого шару, криві 2 – зовнішнього несучого шару; точки зближення цих кривих 1 і 2 вказують на розташування армуючих ребер.

На рис. 4.19б наведені порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^1 (1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10T$.

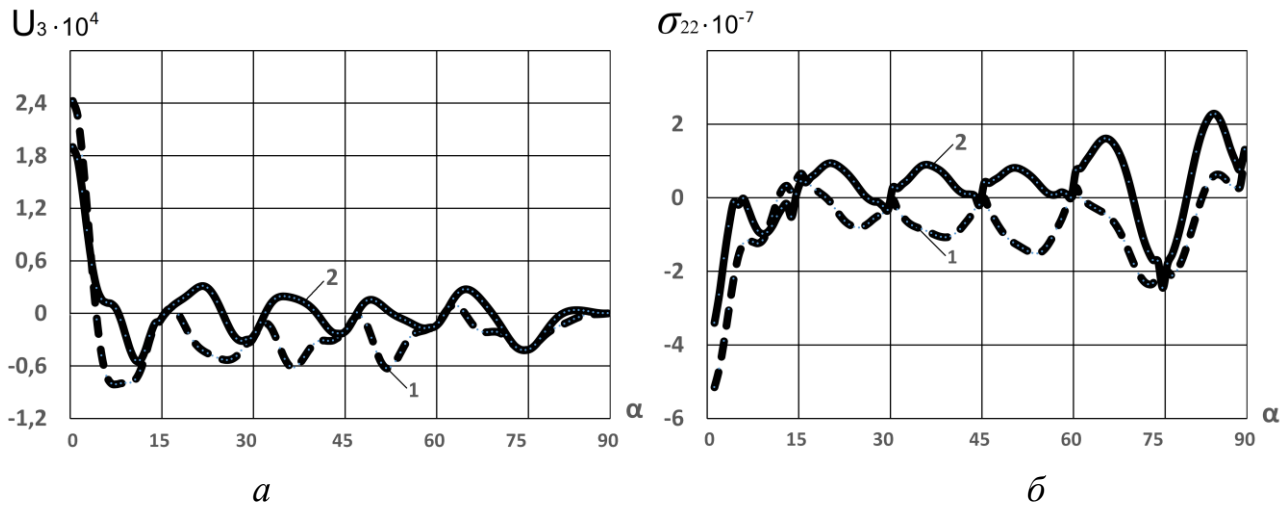


Рис. 4.19. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $t = 10T$ ($E_{1,2}/E_t = 500$)

Перші п'ять власних частот даної півсферичної тришарової структури становлять:

1. 1411.10 Гц, 2. 1411.10 Гц, 3. 1941.12 Гц, 4. 2277.20 Гц, 5. 2277.20 Гц.

На рис. 4а наведено порівняльні графіки максимальних прогинів у серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 8,7T$. Заповнювач відповідає співвідношенню $E_{1,2} / E_t = 50$.

На рис. 4б наведені отримані в цей же час порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 .

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять:

1. 1533,19 Гц, 2. 1533,19 Гц, 3. 2145,03 Гц, 4. 2456,68 Гц, 5. 2456,68 Гц.

Аналіз чисельних результатів характеристик напружено-деформованого стану в серединних поверхнях оболонки показує, що в першому варіанті (рис. 4.19а, 4.20а) максимальні прогини внутрішнього шару у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні прогини структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ на в 1,6 рази, а максимальні прогини зовнішнього шару при аналогічному порівнянні – мали перевищення на 28%.

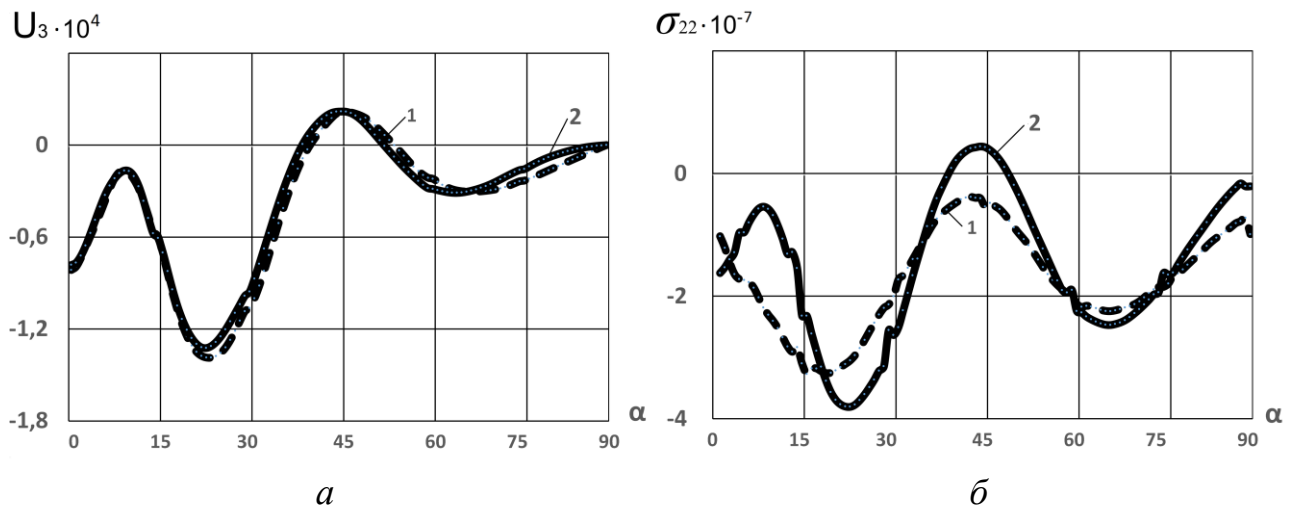


Рис. 4.20. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $t = 8,7T$ ($E_{1,2}/E_t = 50$)

В той же час (рис. 4.19б, 4.20б) максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару у випадку співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні напруження структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ майже в 1,7 рази, а максимальні напруження зовнішнього шару при $E_1/E_t = 500$ перевищили максимальні величини напруження зовнішнього шару при $E_1/E_t = 50$ приблизно на 12%.

Другий варіант структури мав відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача: $E_2/E_t = 500$; $E_2/E_t = 50$; $E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $E_2 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $h_1 = 0,002 \text{ м}$; $h_2 = 0,002 \text{ м}$; $H_j = 10h_2$; $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $h/R_1 = 0,08$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$. Фізичні і механічні параметри характеристик полімерного заповнювача були наступні: $E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$; $E_t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$; $\nu_t = 0,33$. Загальна маса такої структури дорівнює 13,438 кг, а заповнювача – 0,299 кг і ребер - 0,719 кг.

На рис. 4.21а наведено залежності максимальних величин нормальних прогинів внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів в серединних поверхнях від кутової координати α , при $t = 9,35T$ із заповнювачем $E_2/E_t = 500$.

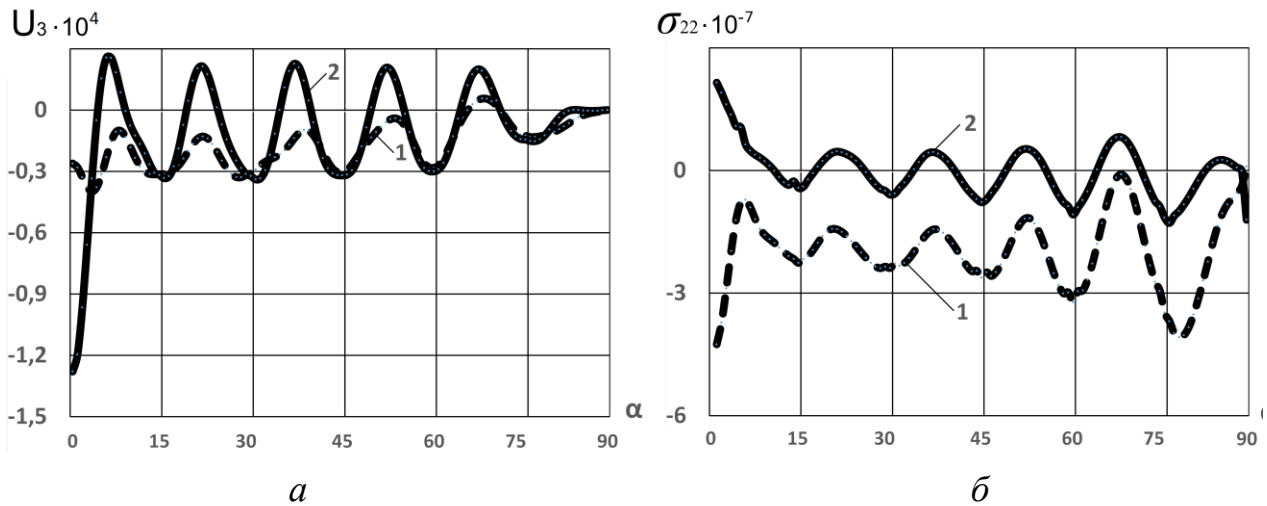


Рис. 4.21. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t = 9,35T$ ($E_2/E_t = 500$)

На рис. 4.21б наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α , в момент часу $t = 9,35T$. Пінопласт: $E_2/E_t = 500$. Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: 1. 1456.95 Гц, 2. 1456.95 Гц, 3. 1980.59 Гц, 4. 2352.31 Гц, 5. 2352.31 Гц. На рис. 4.22а наведено графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 8,65T$. Заповнювач співвідношенням $E_2/E_t = 50$. На рис. 4.22б наведені порівняльні графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1, \sigma_{22}^2$ в момент часу $t = 8,4T$. Перші п'ять власних частот даної структури становлять: 1. 1539.94 Гц, 2. 1539.94 Гц, 3. 2123.00 Гц, 4. 2469.09 Гц, 5. 2469.09 Гц.

Проведенні дослідження чисельних результатів показників напружено-деформованого стану в серединних поверхнях несиметричної структури другого випадку (рис. 4.21а, 4.22а) показують, що максимальні прогини внутрішнього шару при співвідношенні $E_2/E_t = 500$ були меншими аналогічних прогинів структури при співвідношенні $E_2/E_t = 50$ майже на 58%, а максимальні прогини зовнішнього шару, перевищили майже в 2,7 рази аналогічні прогини структури при співвідношенні $E_2/E_t = 50$.

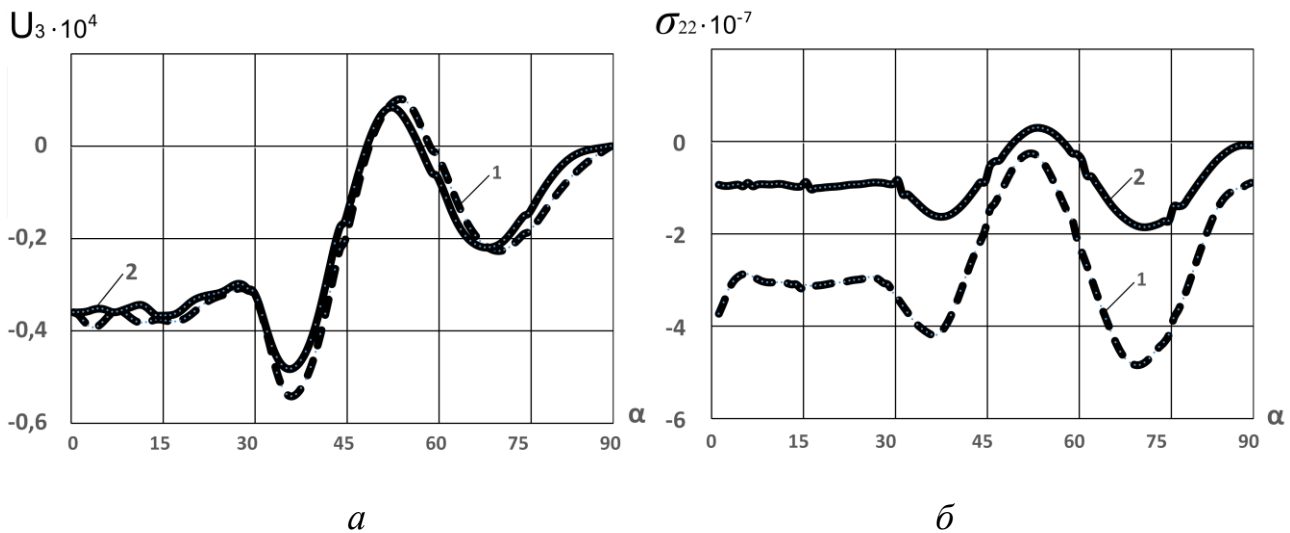


Рис. 4.22. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $t = 8,65T$ ($E_2/E_t = 50$)

Максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару (рис. 4.21б, 4.22б) у структурі із $E_2/E_t = 500$ були меншими на 14% ніж у такому ж шарі структури із співвідношенням $E_2/E_t = 50$, а максимальні напруження зовнішнього шару при розгляді відповідних варіантів цього випадку були більшими на 15%.

Третій варіант структури: мав відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача: $E_{1,2}/E_t = 500$; $E_{1,2}/E_t = 50$; $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $h_1 = 0,002 \text{ м}$; $h_2 = 0,004 \text{ м}$; $H_j = 4,5h_2$; $R_1 = 0,3$; $h/R_1 = 0,08$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$.

Фізико-механічні параметри для заповнювача (пінопласту) наступні:

$E_t = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}$; $E_t = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$; $\nu_t = 0,33$. Маса конструкції дорівнює 11,019 кг, заповнювача – 0,268 кг, ребер – 0,643 кг.

На рис. 4.23а приведено залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 внутрішнього і зовнішнього u_3^2 несучих шарів в їх серединних поверхнях від кутової координати α в момент часу $t = 4,26T$, $E_{1,2}/E_t = 500$.

На рис. 4.23б у приведеному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22} у серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в цей же момент часу.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять:

1. 1430,57 Гц, 2. 1430,57 Гц, 3. 1953,91 Гц, 4. 2300,09 Гц, 5. 2300,09 Гц.

На рис. 4.24а наведено залежності максимальних величин нормальних прогинів внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів в їх серединних

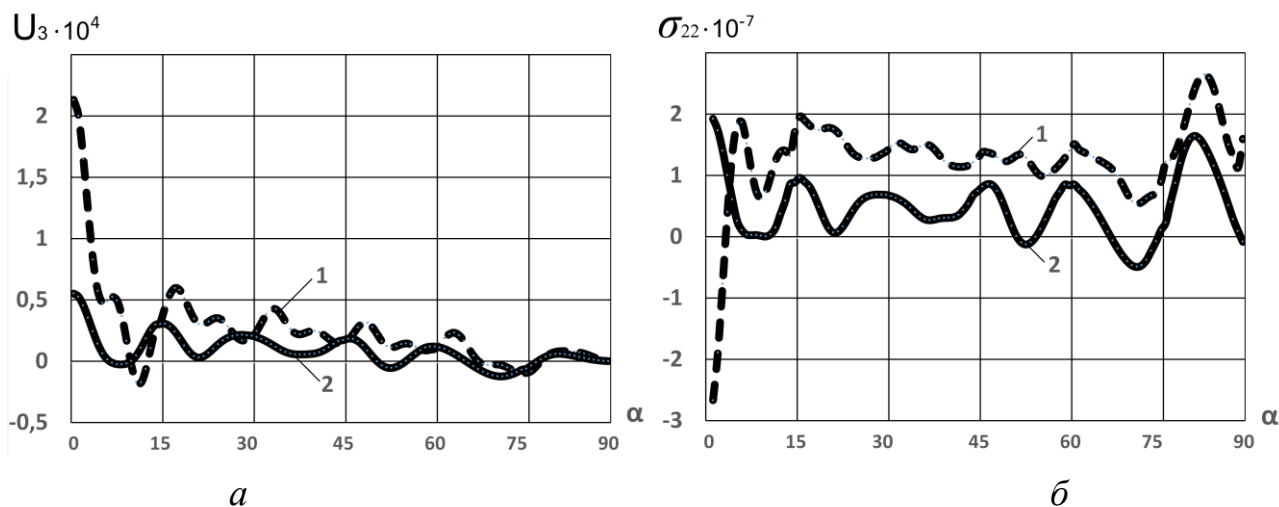


Рис. 4.23. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $t = 4,26T$ ($E_{1,2}/E_t = 500$)

поверхнях від кутової координати в момент часу $t=8,85T$. Полімерний заповнювач відповідав $E_{1,2}/E_t = 50$.

На рис. 4.24б наведено залежності величин нормальних напружень в серединних поверхнях внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів від

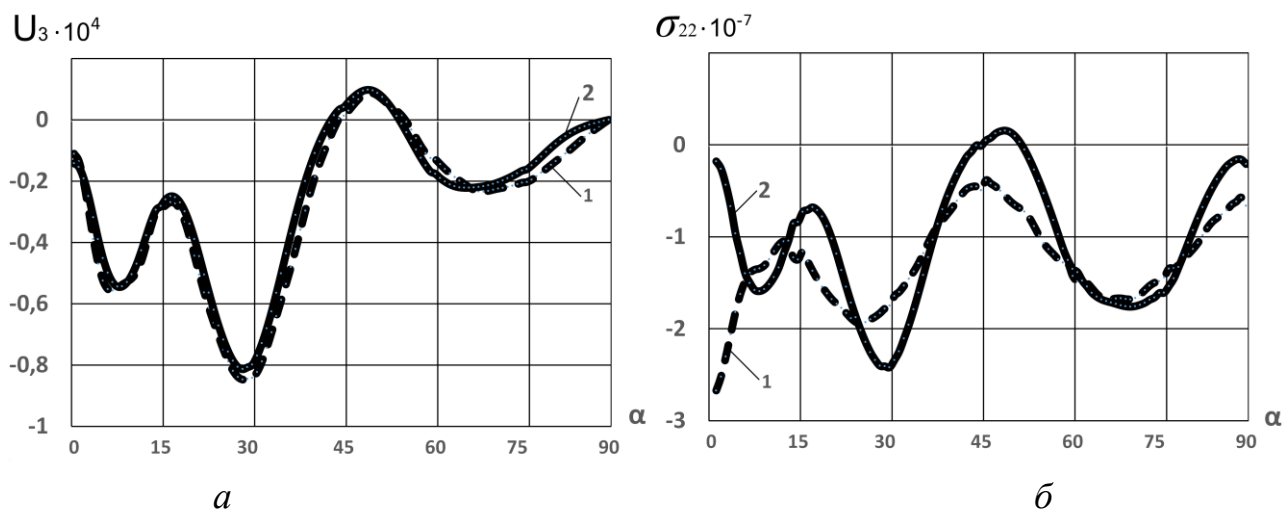


Рис. 4.24. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів якщо $t = 8,85T$ ($E_{1,2}/E_t = 50$)

кутової координати, в момент часу $t=8,85T$. Полімерний заповнювач був тієї ж

пружності.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять:

1. 1517.67 Гц, 2. 1517.67 Гц, 3. 2103.32 Гц, 4. 2429.30 Гц, 5. 2429.30 Гц.

Порівнюючи показники НДС третього варіанту структур з різною пружністю заповнювача видно, що при $E_{1,2}/E_t = 500$ максимальні прогини внутрішнього шару перевищили аналогічні прогини структури з заповнювачем $E_{1,2}/E_t = 50$ в 2,5 рази, при цьому максимальні величини прогинів зовнішніх шарів у даних варіантах відрізнялися в 1,6 рази.

Максимальні нормальні напруження внутрішнього шару (рис. 7б, 8б) при співвідношеннях $E_{1,2}/E_t = 500$ і $E_{1,2}/E_t = 50$ були майже однаковими, а максимальні напруження зовнішнього шару першого випадку були меншими аналогічних напружень зовнішнього шару другого випадку цього варіанту майже на 25 %.

Отже, загальною тенденцією динаміки всіх розглянутих варіантів структур тришарової півсферичної оболонки виявилось значне реагування на зміну модуля пружності полімерного заповнювача, величина якого істотно вплинула на характер коливання.

Як свідчать результати розрахунку: збільшення на порядок модуля пружності полімерного заповнювача істотно зменшує в структурі ефект дії армування.

Висновок. Проведено лінійний динамічний аналіз перехідних процесів тришарової напівсферичної оболонки симетричної і несиметричної структури із дискретно-симетричним полімерним, армованим ребрами заповнювачем. При аналізі елементів пружних оболонкових структур використано модель теорії оболонок та стержнів Тимошенко. Досліджено напружено-деформований стан несучих шарів структур при осесиметричному нестационарному навантаженні.

Скінченно-елементним методом виконані чисельні розрахунки максимальних величин нормальних прогинів u_3 і нормальних напружень σ_{22} в серединних поверхнях несучих шарів оболонок. Отримані результати показують що параметри геометрії несучих шарів структури, фізико-механічні властивості їх матеріалу та пружність заповнювача значно впливають на нестационарний

динамічний процес півсферичної оболонкової структури.

Таким чином, підбираючи матеріал шаруватого пакету півсферичної структури, товщину її несучих шарів, пружність заповнювача можна створювати конструкцію півсферичної оболонки з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні, виявляти нові механічні ефекти.

5. Дослідження впливу дефектів на динамічні характеристики шаруватих оболонкових структур канонічної форми

Досліджується динаміка тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем, в якості дефектів в яких передбачена наявність дефекту у вигляді розриву в армуючих ребрах структури при дії нестационарних навантажень. Виконується теоретичне дослідження спектру власних частот тришарових циліндричних оболонок та аналіз впливу розмірів колових розривів на амплітудно-силові характеристики структури за різних граничних умов.

5.1. Аналіз впливу дефектів у тришарових циліндричних оболонках

Для теоретичного аналізу впливу колових дефектів на амплітудно-частотні характеристики тришарових циліндричних оболонок симетричної структури з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем використовується рівняння руху такого елемента. Тришаровий циліндричний елемент з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої (індекс 1), зовнішньої (індекс 2) несучих оболонок, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками. Елемент має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z=0$ збігається з осью лінійною; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка перебуває з боку опуклості серединної поверхні (рис. 5.1). Наявність легкого пружного матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими оболонками створює дискретну неоднорідність ребристого заповнювача. Напружено-деформований стан внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$.

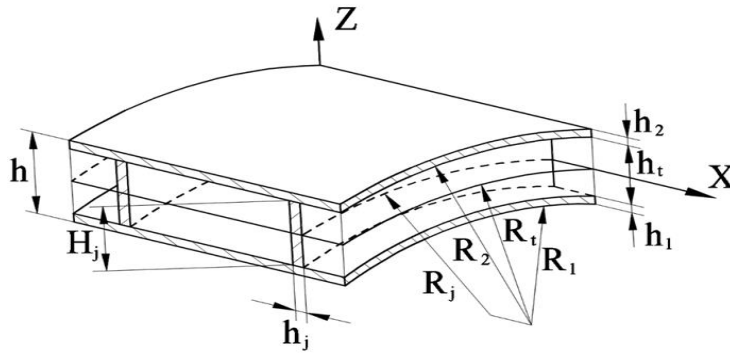


Рис. 5.1. Тришаровий елемент оболонки з армуючими ребрами

Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_t = (u_{1t}, u_{3t}, \varphi_{1t})^T$ згідно моделі, розробленої в роботі [108]. Деформований стан армуючих ребер, спрямованих вздовж колової координати, будемо визначати узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

Використовуючи зсувну теорію оболонок, переміщення u_1^i і u_3^i в несучих оболонках в напрямку x (поздовжній), z (товщина) і t (час) за малих лінійних переміщень виражаються через наступні залежності:

$$u_1^i(x, z, t) = u_{01}^i(x, t) + z_i \varphi_1^i(x, t); \quad (5.1.1)$$

$$u_3^i(x, z, t) = u_{03}^i(x, t) \quad (i=1, 2),$$

де z_i – вертикальна координата кожної несучої оболонки і вимірюється вгору від серединної поверхні кожної несучої оболонки; φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих оболонок.

Кінематичні залежності для несучих оболонок при малих деформаціях записуються наступним чином:

$$\varepsilon_{11}^i = \varepsilon_{011}^i + z_i k_{11}^i; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad 2\varepsilon_{13}^i = \varepsilon_{013}^i \quad (i=1, 2), \quad (5.1.2)$$

$$\varepsilon_{011}^i = \frac{\partial u_0^i}{\partial x}; \quad \varepsilon_{022}^i = \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{013}^i = \frac{\partial u_{03}^i}{\partial x} + \varphi_1^i; \quad k_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x} \quad (i=1, 2). \quad (5.1.3)$$

де: ε_{011}^i , ε_{022}^i , ε_{013}^i – компоненти деформацій серединних поверхонь несучих оболонок.

Умови жорсткого з'єднання армуючих ребер з циліндричними несучими оболонками записуються по лініях контакту центрів тяжіння ребер з несучими оболонками згідно [118]

$$u_1^j = u_1^{jk}(x_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(x_j); \quad (5.1.4)$$

$$u_3^j = u_3^{jk}(x_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(x_j) \quad (k=1,2),$$

де x_j – координата лінії множин точок проекцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучої оболонки;
 $h_j^i = 0,5h_i + \frac{H_i}{2}$; h_i ($i=1,2$) – товщини циліндричних несучих оболонок; $H_j/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача $h_t = H_j$.

Переміщення легкого заповнювача в даному випадку записуються згідно моделі, наведеної в роботі [108]:

$$u_1^t(x, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(x, t) + z_t u_1^t(x, t); \quad (5.1.5)$$

$$u_3^t(x, z, t) = u_{03}^t(x, t).$$

За малих деформацій кінематичні залежності міжшарового заповнювача для шаруватих оболонок приймаються у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial x} + z \frac{u_1^t}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_{03}^t}{R_t + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial x}\right) + u_1^t, \quad (5.1.6)$$

де u_0^t , u_1^t , u_{03}^t – компоненти узагальненого вектора переміщень легкого заповнювача.

Модель, передбачаючи ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими оболонками без відриву і проковзування, представлена наступним чином:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^t & \text{для } i=1 \rightarrow (k=0; z_t^1 = -h_t/2); \\ u_{03}^t = u_{03}^t & \text{для } i=2 \rightarrow (k=1; z_t^2 = h_t/2). \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Приймаючи до уваги вирази для поля переміщень несучих оболонок (5.1.1), легкого заповнювача (5.1.5) і умови міжшарової неперервності переміщень (5.1.7) виведемо спрощені умови сумісності:

$$u_0^t = \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \quad u_1^t = \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \quad (5.1.8)$$

$$u_{03}^t = \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2).$$

Для армуючих ребер заповнювача зусилля і моменти обчислюються за формулами:

$$T_{11j} = \int_{F_j} \sigma_{11j} dF_j; \quad Q_{13j} = \int_{F_j} \sigma_{13j} dF_j; \quad M_{11j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{11j} dF_j. \quad (5.1.9)$$

Рівняння руху для несучих оболонок і ребристого легкого заповнювача

виводяться згідно варіаційному принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського (2.2.10). Вирази для варіацій потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді (2.2.11) - (2.2.17). Після перетворень у варіаційному рівнянні (2.2.10), з урахуванням співвідношень (2.2.11) – (2.2.17), отримаємо дві системи гіперболічних рівнянь руху дев'ятого порядку - рівнянь коливань для тришарового циліндричного елемента з легким ребристим заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні природні граничні і початкові умови (2.2.18).

Ці системи рівнянь утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі оболонки-армуючі ребра». На лініях розривів в рівняннях коливань (2.2.18) величини $[T_{11}^{i\pm}]_j$; $[T_{13}^{i\pm}]_j$; $[M_{11}^{i\pm}]_j$ відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих оболонок. При виведенні цих рівнянь використана модель, яка передбачає ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими оболонками без відриву і проковзування.

Числові результати і аналіз розрахунків.

Проведемо дослідження впливу появи колових розривів в різних армуючих ребрах тришарового циліндричного елемента ракетної конструкції на його амплітудно-частотні характеристики за різних граничних умов. Спосіб з'єднання оболоноквих відсіків такої техніки визначає вид граничних умов. В якості дефектів змодельємо наскрізні колові розриви як в одному, так і сумісно в двох в армуючих ребрах.

Розглянемо тришарову циліндричну оболонку симетричної структури з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем з наступними параметрами:

$$\frac{L}{h_1} = 200; h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; \frac{R_1}{h_1} = 50; \frac{H_j}{h_1} = 8; F_j = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; v_1^1 = v_1^2 = v_j = 0,3;$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

де L - довжина оболонки, h_i - товщини несучих шарів, R - радіус оболонки,

H_j - товщина легкого заповнювача (пінопласту) F_j - площа поперечного перетину армуючого ребра, E - модулі пружності, ν - коефіцієнти Пуассона, ρ - густина. Модуль пружності заповнювача $E^t = 3,5 \cdot 10^7$ Па, його густина $\rho_t = 27 \cdot 10^3$ кг/м³, коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,27$.

Матеріал несучих шарів циліндричного елемента має параметри сплаву АМГ-6: Al: 91.1-93.68%, Mg: 5.8-6.8%, Mn: 0.5-0.8%, Fe ($\leq 0.4\%$), Si ($\leq 0.4\%$), Zn ($\leq 0.2\%$), Ti: 0.02-0.1%, Cu ($\leq 0.1\%$), Be: 0.0002-0.005%.

Створена адекватна рівнянню (1.18) скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки (рис. 5.2) складається із: a – зовнішнього несучого шару; b – внутрішнього несучого шару; c – армуючих ребер і d – легкого заповнювача.

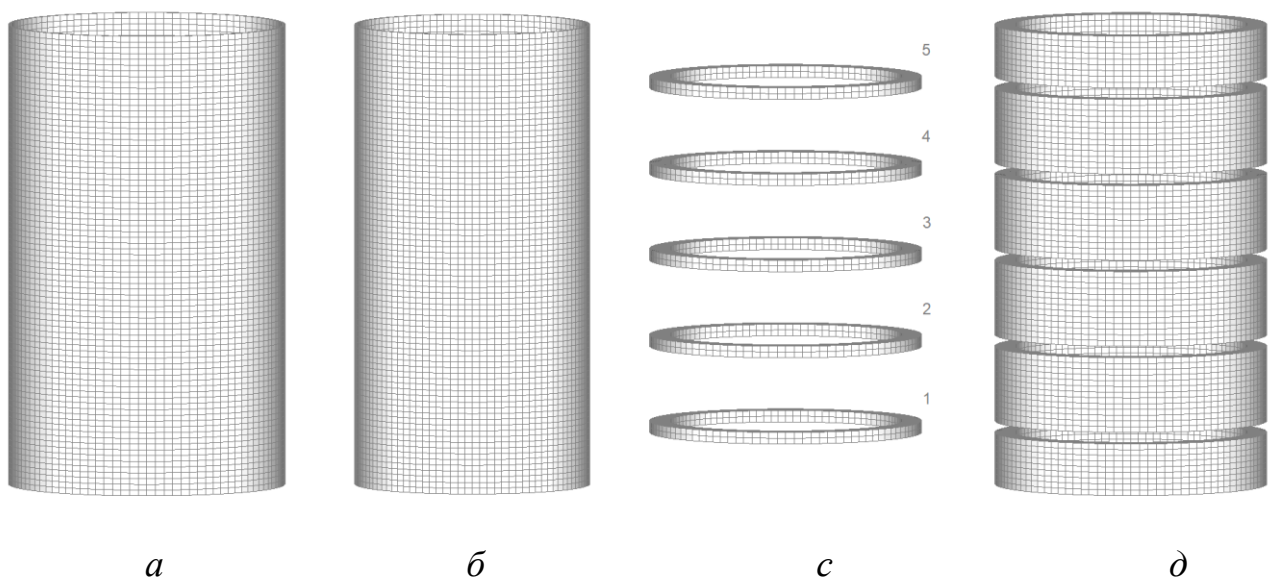


Рис. 5.2. Скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки:
 a – зовнішній несучий шар; b – внутрішній несучий шар; c – арматурні ребра;
 d – легкий заповнювач

В моделі оболонки використано тривимірний скінченний елемент суцільного середовища типу *Solid*, у формі восьмивузлового гексаедра (рис.5.3), який за критеріями геометричної форми звуження і викривлення, відповідав вимогам забезпечення якості розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні.

У варіанті структури без полімерного заповнювача кількість скінченних елементів складала: у зовнішній несучій оболонці 16000 елементів, внутрішній –

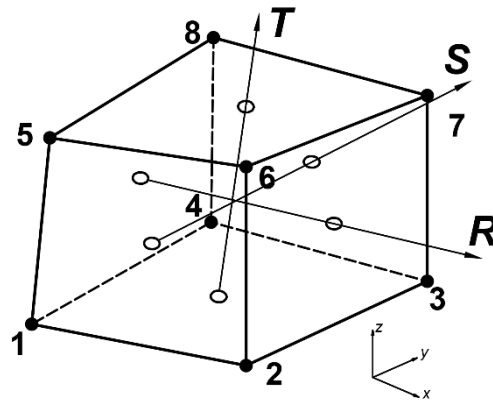


Рис. 5.3 Тривимірний скінченний елемент типу *Solid*

16000, а в армуючих ребрах – 8000. Кількість скінченних елементів в структурі з легким заповнювачем (пінопластом) дорівнювала 56000. Загальна кількість скінченних елементів у моделі без пінопласту складала 40000 елементів і 59100 вузлів. А при наявності пінопласту ці дані: 96000 елементів і 105300 вузлів. При такій розбивці скінченно-елементної моделі на елементи і вузли забезпечується практична якість сітки скінченних елементів [109].

При дослідженні циліндричних тришарових елементів розглядалися різні варіанти наявності колових розривів у четвертому і п'ятому армуючих ребрах структур за наявністю та відсутністю пінопласту. Циліндричні оболонки досліджувалися за різних граничних умов закріплення торців несучих шарів при дії імпульсного осесиметричного навантаження у вигляді $P_1 = A \sin \frac{\pi t}{T} \times [\eta(t) - \eta(t - T)]$; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. T – тривалість імпульсу навантаження; $T = R/c$, де c – швидкість поздовжніх хвиль в матеріалі несучих шарів; В розрахунках покладалось: $A = 10^6$ Па; $T = R_1/c = 5 \cdot 10^{-5}$ с.

В досліджуваних варіантах оболонкових структур аналізувалися зміни нормальних деформацій і напружень за Мізесом в серединних поверхнях несучих шарів по відношенню до стану структур без розривів (нормального стану).

У випадку жорсткого закріплення торців несучих оболонок: $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0$ ($i = 1, 2$) за відсутності пінопласту. Початкові умови є нульовими для всіх випадків несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i=1, 2).$$

Еквівалентні напруження в елементах обчислювалися відповідно гіпотези енергії формозміни фон Мізеса. Згідно якої плинність пластичного матеріалу настає тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни деформованого тіла досягає своєї граничної величини, незалежно від виду напруженого стану. Питому енергію формозміни описує другий інваріант тензора напружень J_2 . Цей критерій розглядається у розділі теорії пластичності і в основному застосовується до пластичних матеріалів, переважно металів та їх сплавів. Підставивши у J_2 компоненти тензора механічних напружень, отримаємо:

$$\sigma_{vM}^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

На Рис. 5.4. наведено графіки нормальних деформацій і напружень за фон Мізесом (σ_{vM}) оболонки без дефектів в момент часу 10,7Т.

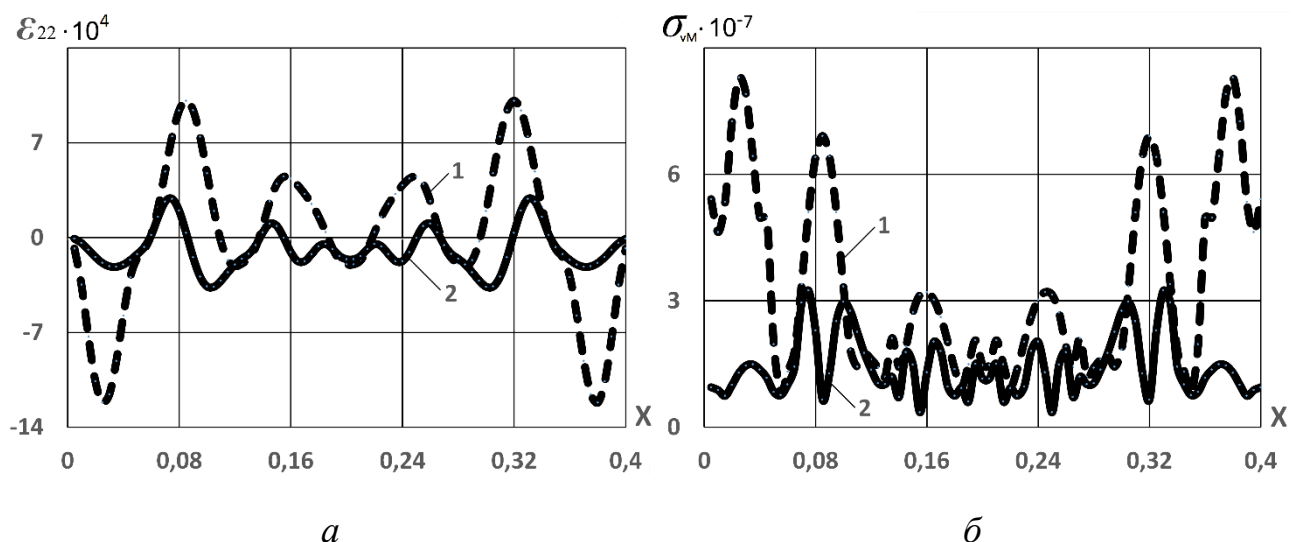


Рис.5.4. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б). Жорстке закріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки без дефектів

По відношенню до нормального стану оболонки при жорсткому закріпленні торців оболонки без пінопласту дефект у п'ятому ребрі (рис. 5.5а) в першому випадку (при 19,75Т) спостерігалось зростання максимальної величини нормальних деформацій у в місці розташування п'ятого армуючого ребра у внутрішньому шарі на 45,5%, а в зовнішньому шарі нормальні деформації

незначно змінилися - 2,19%.

Аналогічно за характером виявився і розподіл максимальних напружень за фон Мізесом (рис. 5.5б) в першому випадку в місці розташування п'ятого ребра у внутрішньому шарі напруження збільшилися на 21,7%. А в зовнішньому шарі величини напружень майже не змінилися - 1,85%.

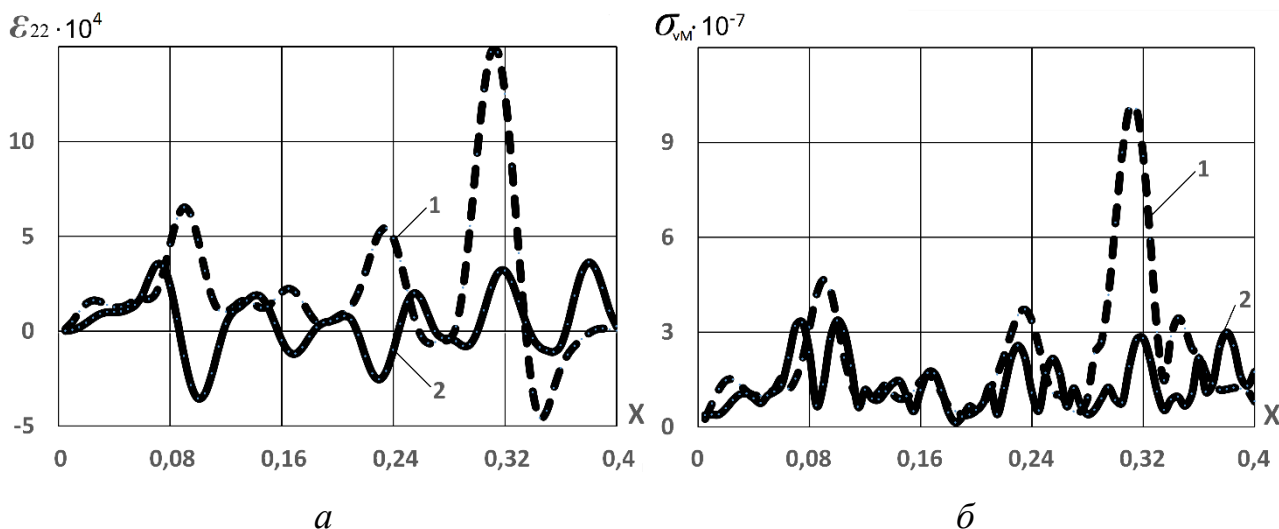


Рис. 5.5. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

В другому випадку в момент часу 19Т за наявності дефектів у четвертому та п'ятому ребрах (рис. 5.6) також відбулося збільшення величини нормальної деформації у внутрішньому шарі по відношенню до нормального стану оболонки на 26,7%. А у зовнішньому шарі відбулося зростання максимальної величини нормальних деформацій майже на 30%.

При розподілі максимальних напружень за фон Мізесом в другому випадку по відношенню до нормального стану відзначалося зростання напруження внутрішнього шару на 7,7%. У зовнішньому шарі максимальні напруження зросли на 42,6%.

Випадок жорсткого закріплення торців несучих оболонок:

$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0, (i = 1, 2)$ за наявності пінопласту наведено на рис. 5.7.

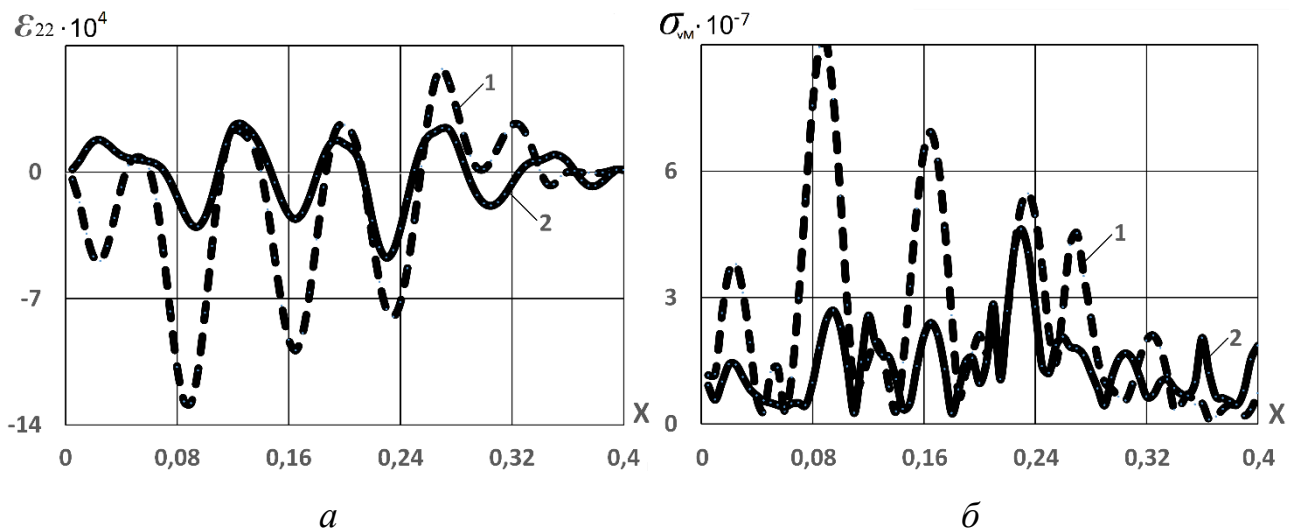


Рис. 5.6. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки з дефектами в четвертому та п'ятому армуючих ребрах

На рис. 5.7 наведені досліджувані характеристики нормального стану оболонки в момент часу 19,85Т.

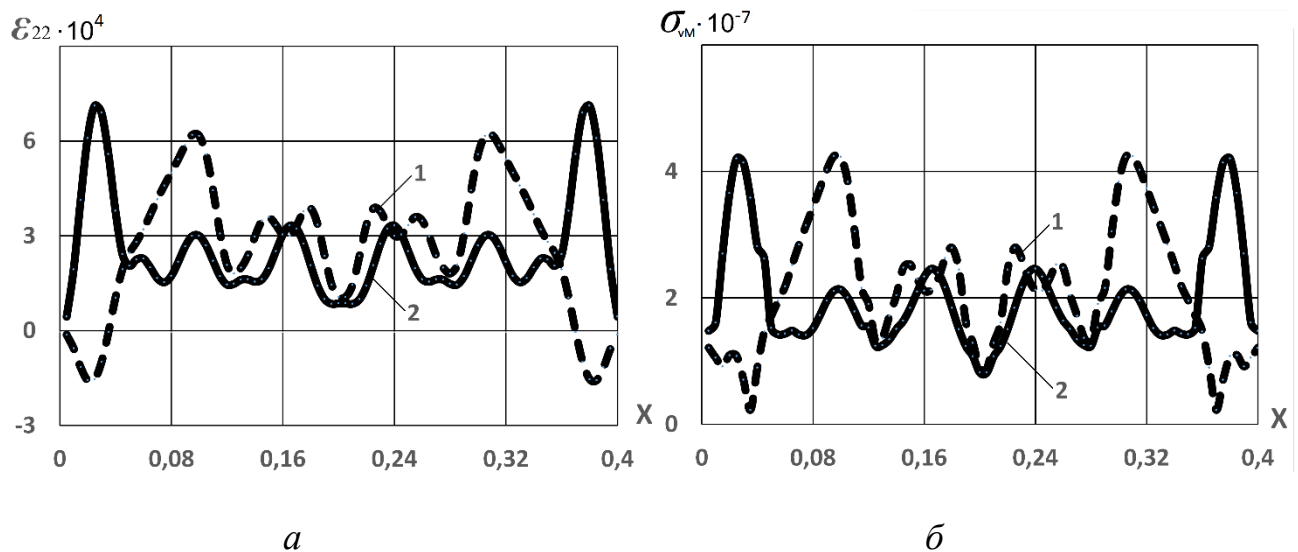


Рис. 5.7. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції з пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки без дефектів

За наявності дефектів по відношенню до бездефектного стану оболонки при жорсткому закріпленні її торців і наявності пінопластового заповнювача в першому випадку в момент часу 18,5Т (рис. 5.8), дефект у п'ятому ребрі, спостерігалася збільшення максимальної величини нормальних деформацій у внутрішньому шарі у місці розташування п'ятого ребра на 67%. А в зовнішньому

шарі в цьому випадку нормальні деформації структури зменшилися практично на 58%.

Аналогічним за характером виявився і розподіл максимальних напружень за фон Мізесом в першому випадку: збільшення напруження у внутрішньому шарі досягало 68%, а у зовнішньому шарі величина напруження зменшилися на 11%.

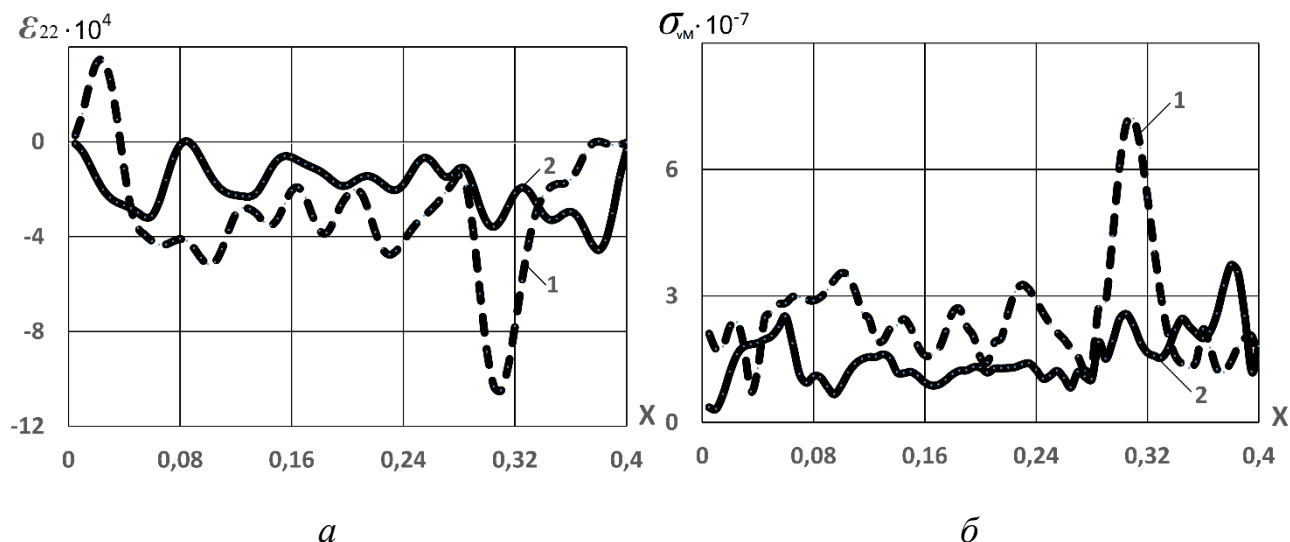


Рис. 5.8. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції з пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

У другому випадку в момент часу $15,75T$ (рис. 5.9), при наявності дефектів у четвертому та п'ятому ребрах, відбулося зростання на 51% нормальних деформацій у місці розташування п'ятого ребра оболонки. У зовнішньому шарі

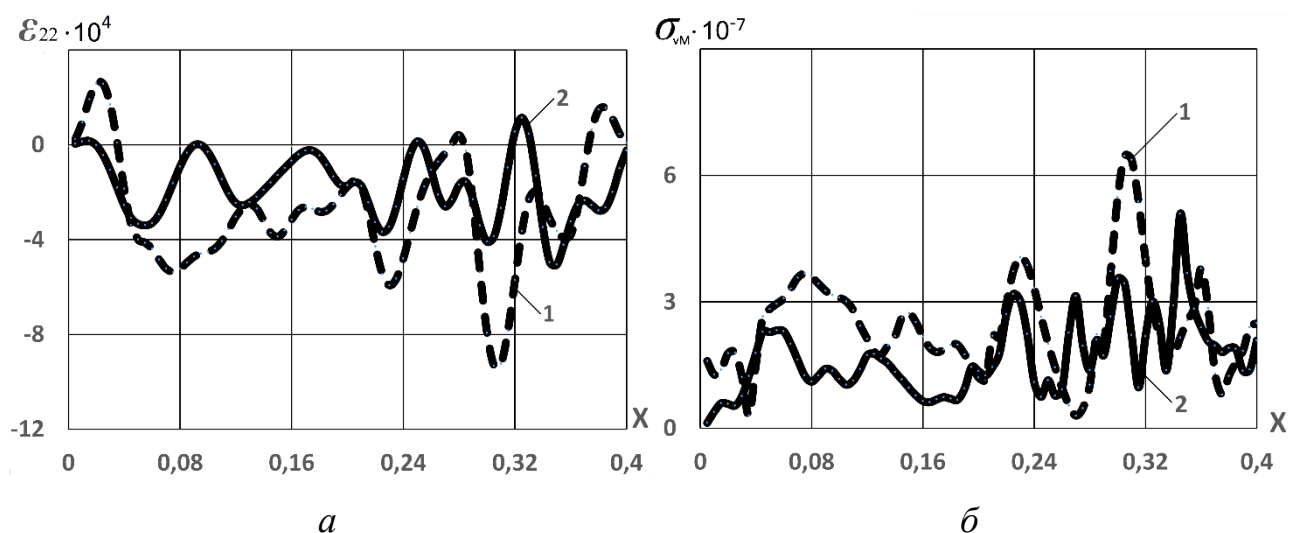


Рис. 5.9. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції з пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектами в четвертому та п'ятому армуючих ребрах зміна величини деформації виявилася незначною. Подібні зміни напружень за фон Мізесом виявились: у внутрішньому шарі оболонки в місці розташування п'ятого ребра напруження зросло на 51% по відношенню до бездефектного стану. А його зростання у зовнішньому шарі становило 21%.

У випадку комбінованого закріплення торців оболонки: знизу жорстке закріплення $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0. (i = 1, 2)$, а зверху шарнірне закріплення $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0. (i = 1, 2)$. За відсутності пінопластового заповнювача.

На Рис. 5.10 наведені характеристики нормального стану оболонки якщо $t=16,6T$.

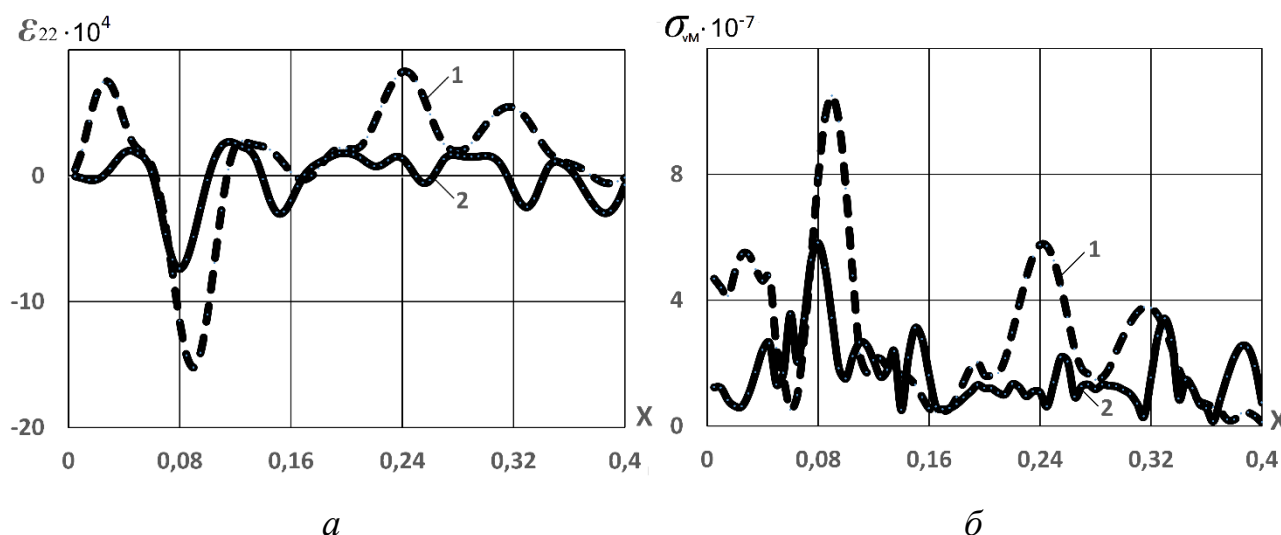


Рис. 5.10. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки без дефектів

При дефектах і комбінованому закріпленні торців оболонки за наявності пінопласту (рис. 5.11), розрив у п'ятому ребрі, в першому випадку в момент часу 14,2Т спостерігалось невелике зменшення максимальної величини нормальних деформацій у внутрішньому шарі майже на 6% та більш значне зменшення у зовнішньому на 39%.

Аналогічним за характером мали зміни максимальні напруження за фон Мізесом в першому випадку. В цьому випадку збільшення напруження у внутрішньому шарі досягало 7,2%, а максимальні величини деформацій у

зовнішньому шарі зменшилися майже на 41%.

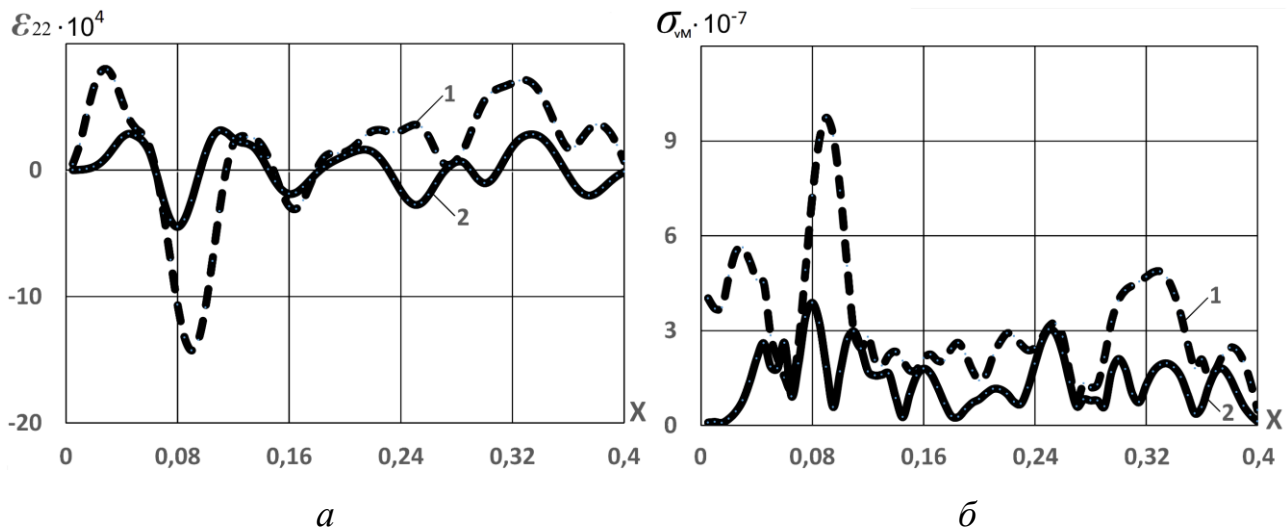


Рис. 5.11. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

У другому випадку в момент часу $12,4T$ (рис. 5.12), розриви у четвертому та п'ятому ребрах, спостерігалось зменшення максимальних нормальних деформацій внутрішнього шару становило 37%, а зовнішнього шар - майже 40%. Величини напружень за фон Мізесом в несучих шарах також зменшилися: у внутрішньому шарі на 11%, у зовнішньому шарі на 24%,

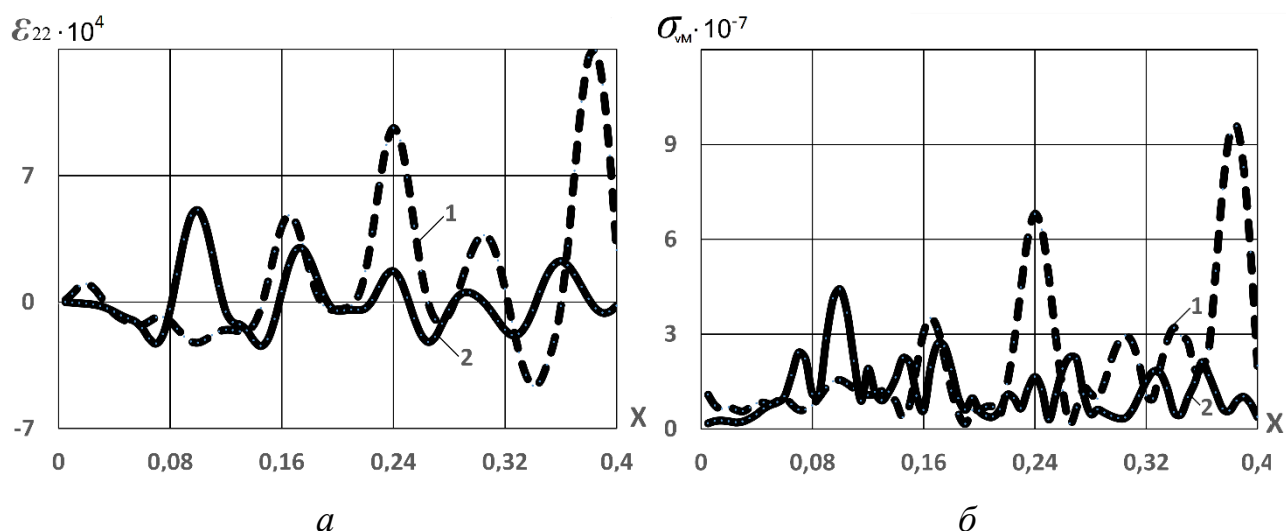


Рис. 5.12. Комбіноване кріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача. Стан оболонки із дефектом в четвертому та п'ятому ребрах

На рис. 5.13. наведені нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б)

бездефектного стану структури із заповнювачем при комбінованому закріпленні торців оболонки (знизу жорстке закріплення $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0, (i = 1, 2)$, зверху шарнірне закріплення $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0, (i = 1, 2)$) якщо час $t = 16,6T$.

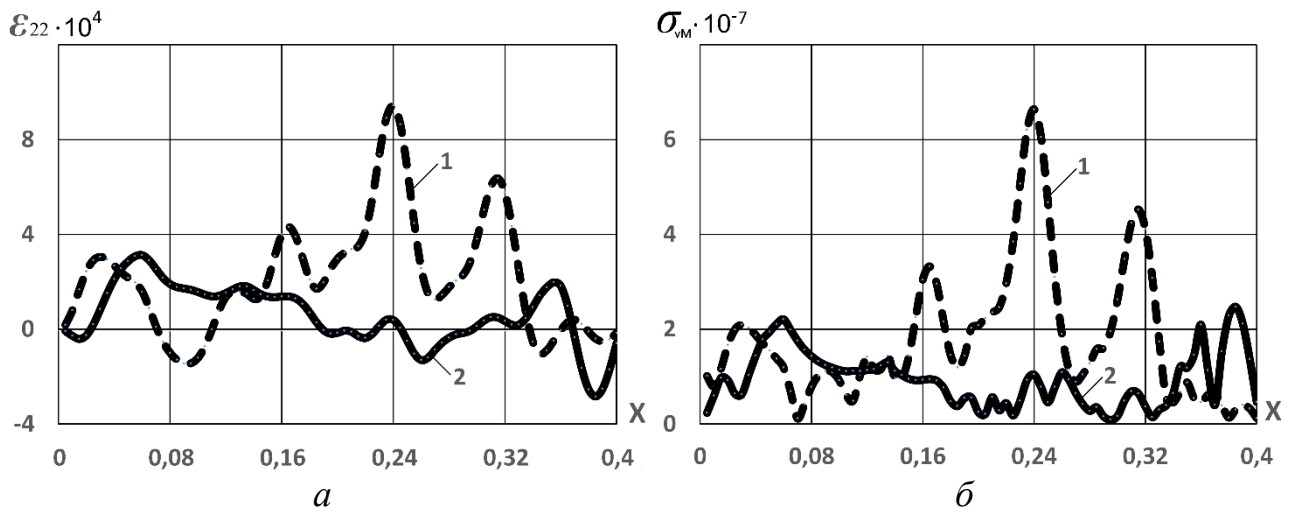


Рис. 5.13. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції із пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки без дефектів

По відношенню до нормального стану оболонки при комбінованому закріпленні торців оболонки з пінопластом в першому випадку в момент часу $19,3T$ (рис. 5.14), розрив у п'ятому ребрі, спостерігалось збільшення максимальної величини нормальних деформацій окремо у кожному із несучих шарів досягало приблизно 9%.

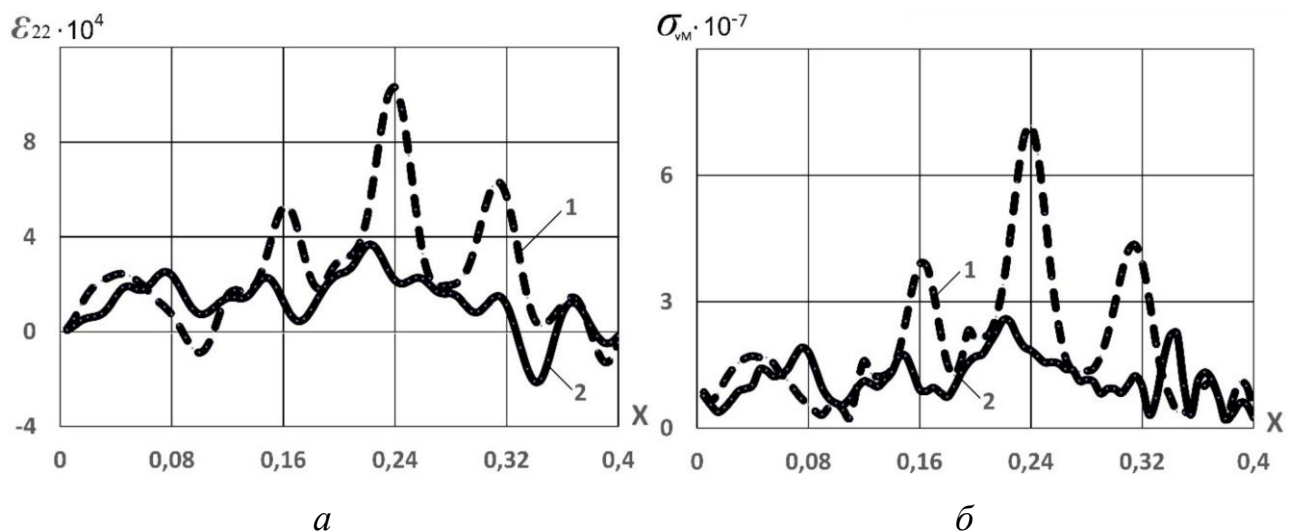


Рис.5.14. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції із пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

Максимальні напруження за фон Мізесом в першому випадку у внутрішньому шарі зросли на 8,1%, а у зовнішньому - вони майже не змінилися.

В другому випадку в момент часу 12,4Т (рис. 5.15), дефекти у четвертому та п'ятому ребрах, нормальні деформації у внутрішньому шарі зменшилися на 7,3%, а у зовнішньому деформації майже не змінилися.

Розподіл максимальних напружень за фон Мізесом в другому випадку по відношенню до нормального стану оболонки відзначався незначним зменшенням величин напружень у обох несучих шарах.

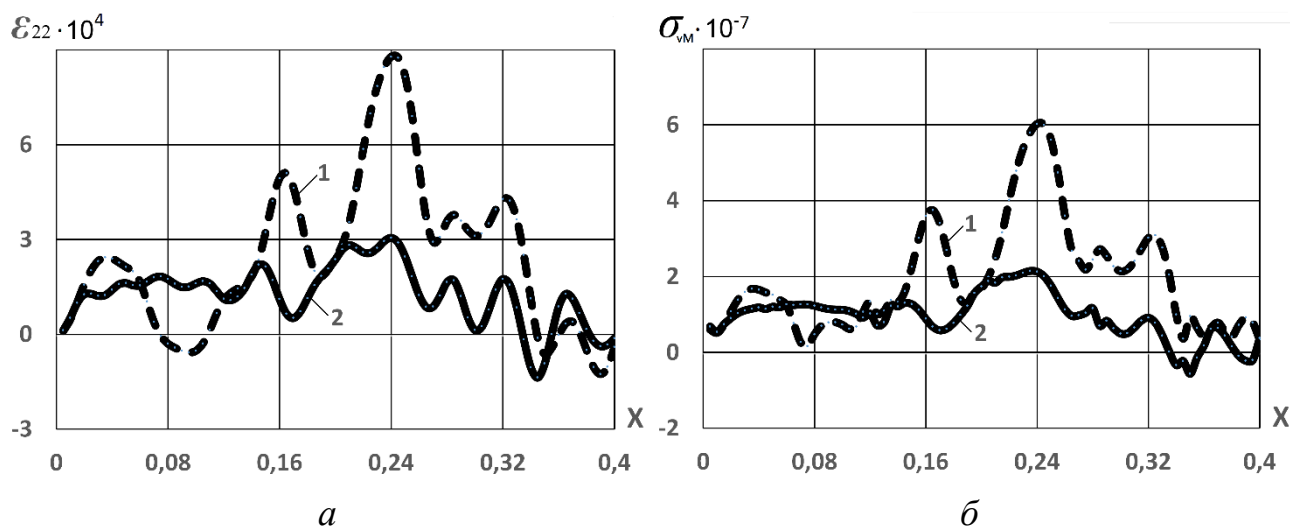


Рис. 5.15. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції із пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектом в четвертому і п'ятому армуючих ребрах

Нижче наведені результати дослідження частотних характеристик тришарових циліндричних оболонок з дефектами.

Циліндрична оболонка з жорстким закріпленням країв: за відсутності пінопласту (табл. № 1).

Циліндрична оболонка жорстке закріплення: $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0, (i = 1, 2)$;

за наявності пінопластового заповнювача (табл. № 2).

Таблиця № 1

Власні частоти циліндричної оболонки з жорстко затиснутими краями без
заповнювача, (Гц)

№	Бездефектний стан оболонки	Дефект у п'ятому ребрі	Дефект у четвертому та п'ятому ребрах
f_1	1584.32	1563.34	1496.09
f_2	1584.33	1563.35	1497.21
f_3	2192.86	2190.35	1945.48
f_4	2192.86	2190.35	1953.43
f_5	2540.69	2445.69	2174.99
f_6	2540.69	2445.82	2188.84
f_7	2715.52	2680.92	2189.23
f_8	2715.55	2680.96	2211.81
f_9	3009.56	2772.43	2554.01
f_{10}	3009.56	2772.86	2555.86

Таблиця № 2

Власні частоти циліндричної оболонки із жорстко затиснутими краями із
заповнювачем, (Гц)

№	Бездефектний стан оболонки	Дефект у п'ятому ребрі	Дефект у четвертому та п'ятому ребрах
f_1	1730.02	1711.42	1633.15
f_2	1730.03	1711.43	1633.57
f_3	2191.82	2190.98	2189.34
f_4	2191.82	2190.13	2189.55
f_5	2843.97	2788.46	2230.51
f_6	2844.01	2788.65	2239.33
f_7	2919.93	2803.78	2748.73
f_8	2919.93	2803.82	2749.98
f_9	3275.13	3135.30	2979.42
f_{10}	3373.12	3135.44	2995.02

Розрахунки показують, що перша власна частота в оболонці без пінопласту з дефектом в п'ятому ребрі і жорсткому закріпленні, на 1% менша від першої власної частоти нормального стану оболонки. Перша власна частота в оболонці без пінопласту із дефектами в четвертому і п'ятому ребрах (при жорсткому закріпленні) на 6% менша від першої власної частоти нормального стану оболонки. Аналогічний розподіл перших власних частот спостерігається і для оболонки з пінопластом. Перші власні частоти в оболонці з пінопластом при жорсткому закріпленні на 9% більші від перших власних частот оболонок без пінопласту (Табл. № 1, Табл. № 2).

Циліндрична оболонка комбіноване закріплення: знизу жорстке закріплення: $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0. (i = 1, 2)$, зверху шарнірне закріплення: $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0. (i = 1, 2)$. За відсутності пінопласту (табл. № 3).

Циліндрична оболонка комбіноване закріплення: знизу жорстке закріплення: $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0. (i = 1, 2)$, зверху шарнірне закріплення: $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0. (i = 1, 2)$. За наявності пінопласту (табл. № 4).

Таблиця № 3

Циліндрична оболонка з комбінованим закріпленням країв без заповнювача

№	Бездефектний стан оболонки	Дефект у п'ятому ребрі	Дефект у четвертому та п'ятому ребрах
f_1	1427.86	1392.03	1308.92
f_2	1427.86	1392.05	1311.98
f_3	1996.17	1993.77	1782.28
f_4	1996.17	1993.77	1785.22
f_5	2488.98	2297.66	1992.33
f_6	2488.98	2297.87	1992.84
f_7	2649.02	2613.38	2017.74
f_8	2649.05	2613.41	2058.46
f_9	2657.22	2650.28	2454.27
f_{10}	2933.68	2723.62	2454.61

Таблиця № 4

Циліндрична оболонка з комбінованим закріпленням країв із заповнювачем

№	Бездефектний стан оболонки	Дефект у п'ятому ребрі	Дефект у четвертому та п'ятому ребрах
f_1	1588.83	1560.90	1464.21
f_2	1588.84	1560.92	1464.86
f_3	1993.65	1992.68	1992.27
f_4	1993.65	1992.68	1992.39
f_5	2643.40	2640.23	2081.25
f_6	2783.18	2645.63	2093.21
f_7	2783.21	2645.95	2637.79
f_8	2876.22	2744.09	2696.52
f_9	2876.22	2744.12	2697.65
f_{10}	3275.13	3097.98	2885.82

Згідно розрахунків перша власна частота в оболонці без пінопласту з дефектом в п'ятому ребрі при комбінованому закріпленні на 3% меншими від першої власної частоти нормального стану оболонки. Перша власна частота в оболонці без пінопласту з дефектами в четвертому і п'ятому ребрах при комбінованому закріпленні на 9% менша від першої власної частоти нормального стану оболонки. Практично аналогічний розподіл перших власних частот спостерігається і для оболонки з пінопластом. Перші власні частоти оболонки з пінопластом при комбінованому закріпленні торців на 12% більші від перших власних частот оболонок без пінопласту (табл. № 3, табл. № 4).

Висновки. Оболонкові конструкції схильні до наявності різного роду дефектів і пошкоджень, таких як розтріскування, що може порушити їх структурну безпеку та вплинути на термін служби. Дефекти є важливими факторами при проектуванні конструкцій тришарових циліндричних оболонок, оскільки вони впливають на характер руйнувань тришарових циліндричних оболонок за різних граничних умов. Проведені розрахунки дозволили кількісно і якісно оцінити

вплив розташування дефектів на амплітудно-частотні характеристики циліндричних оболонок з дефектами. Порівняння результатів нормальних деформацій і максимальних напружень за фон Мізесом в оболонках із дефектами з відповідними показниками оболонок бездефектного стану дозволили оцінити локальну структурну безпеку тришарової конструкції. Виконано дослідження [94] впливу колових розривів на величини власних частот тришарових циліндричних оболонок в залежності від наявності легкого заповнювача та граничних умов структур.

5.2. Вплив дефектів на динамічні характеристики шаруватих конічних оболоноквих структур

Дефекти в оболонкових конструкціях часто не є ізольованими явищами, а можуть утворювати каскадні шляхи руйнування, які починаються з виробничих дефектів і призводить до критичного зниження несучої здатності. Наявність дефектів, таких як порожнечі, розшарування, неоднорідності матеріалу в цих конструкціях значно ускладнює їх аналіз, оскільки вони порушують рівномірність розподілу напружень і деформацій, можуть бути концентраторами напружень і призводити до руйнування.

Стаття [119] представляє методологію для детального вивчення напружено-деформованого стану тришарових конічних оболонок. Основна увага приділяється впливу прямокутних вирізів, що є типовим структурним дефектом в авіаційних конструкціях. Ця робота демонструє, як наявність вирізів змінює розподіл напружень, особливо в зонах концентрації. Інша робота [120] аналізує поширення тріщин у конічно-циліндричних оболонках під впливом циклічних навантажень, притаманних глибоководним умовам.

Постановка задачі

Тришарова конічна пружна оболонкова структура представляє собою конструкцію, яка включає внутрішній (індекс 1), зовнішній (індекс 2) несучі шари, серединні лінії яких паралельні і мають кут конусності α однаковий, а міжшаровий проміжок включає систему дискретних ребер (індекс j), жорстко

з'єднаних із зазначеними несучими шарами, заповнений полімером (індекс t). Шаровий пакет оболонки має однакову загальну товщину, з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат s, z . Причому координатна лінія s на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з твірною лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Величина z вважається позитивною, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні. При усіченій структурі конуса доцільним є використання координати s , яка відраховується від краю оболонки з радіусом R_0 . В цьому випадку поточний радіус конічної оболонки визначається згідно формули: $R_s = R_0 + s \cdot \sin \alpha$. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні конічної оболонки записуються наступним чином: $A_1 = 1, A_2 = R_s, k_1 = 0, k_2 = \cos \alpha / R_s$.

Дослідження динаміки такої структури включає математичне моделювання рівнянь її руху. Рівняння руху для несучих шарів і полімерного заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського (2.3.8).

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок із заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і міжшарового заповнювача. Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів записуються у вигляді (2.3.9)-(2.3.15). Після перетворень в варіаційному рівнянні (2.3.8), з урахуванням співвідношень (2.3.9)-(2.3.15), отримано систему гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для тришарової несиметричної конічної оболонки із заповнювачем, армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні враховуючі граничні умови (2.3.16).

Ілюстрацією може бути постановка і розв'язання задачі динамічного деформування конічної шаруватої оболонки. Одним із її варіантів є визначення напружено-деформованого стану тришарової оболонки, яка представляє собою пружну структуру, що складається з внутрішнього та зовнішнього несучих шарів, полімерного заповнювача, армованого ребрами.

Числові результати і аналіз розрахунків.

Розглянута задача динамічного деформування тришарової конічної оболонки з жорстко зацмеленими торцями під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_1(s, t)$. Граничні умови при $s = s_0, s = s_N$ для несучих шарів мають вигляд:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (5.2.1)$$

початкові умови нульові для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5.2.2)$$

Нестационарне імпульсне навантаження задавалося згідно

$$P_1 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (5.2.3)$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Розрахунки проводились при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах тришарової структури:

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3; \quad R_0 = 0,2 \text{ м};$$

$$R_0 / h_1 = 68; \quad h_1 = h_2 = h_j = 0,002 \text{ м}; \quad H_j = 10 h_1; \quad \alpha = \pi/12 = 15^\circ; \quad F_j = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Легкий заповнювач в структурі відсутній.

Розглянуті також випадки наявності легкого заповнювача з властивостями $E_{1,2}/E_t = 500$; $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$; $\nu_t = 0,33$.

Дискретні підкріплюючі елементи розташовані в точках $s_j = [8 + (k - 1)16]\Delta s$,

$$\Delta s = (s_N - s_0)/80, \quad (s_N - s_0) = 0,4 \text{ м.} \quad k = \overline{1, 5},$$

Відповідна початково-крайова задача (5.2.1) – (5.2.3) вирішується за допомогою скінченно-елементного методу.

Враховуючи неоднаковість властивостей матеріалів суміжних шарів досліджуваної неоднорідної оболонкової структури задачі її динамічного аналізу розв'язувалися скінченно-елементним методом. Який метод є вагомим інструментом для аналізу складної поведінки тришарових оболонок із дефектами. Для виконання розрахунків була створена скінченно-елементна модель структури. На рис. 5.16. наведено скінченно-елементну модель тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим

ребрами заповнювачем і її складові: а – внутрішня несуча оболонка; б – зовнішня несуча оболонка; в – легкий заповнювач; г – армуючі ребра.

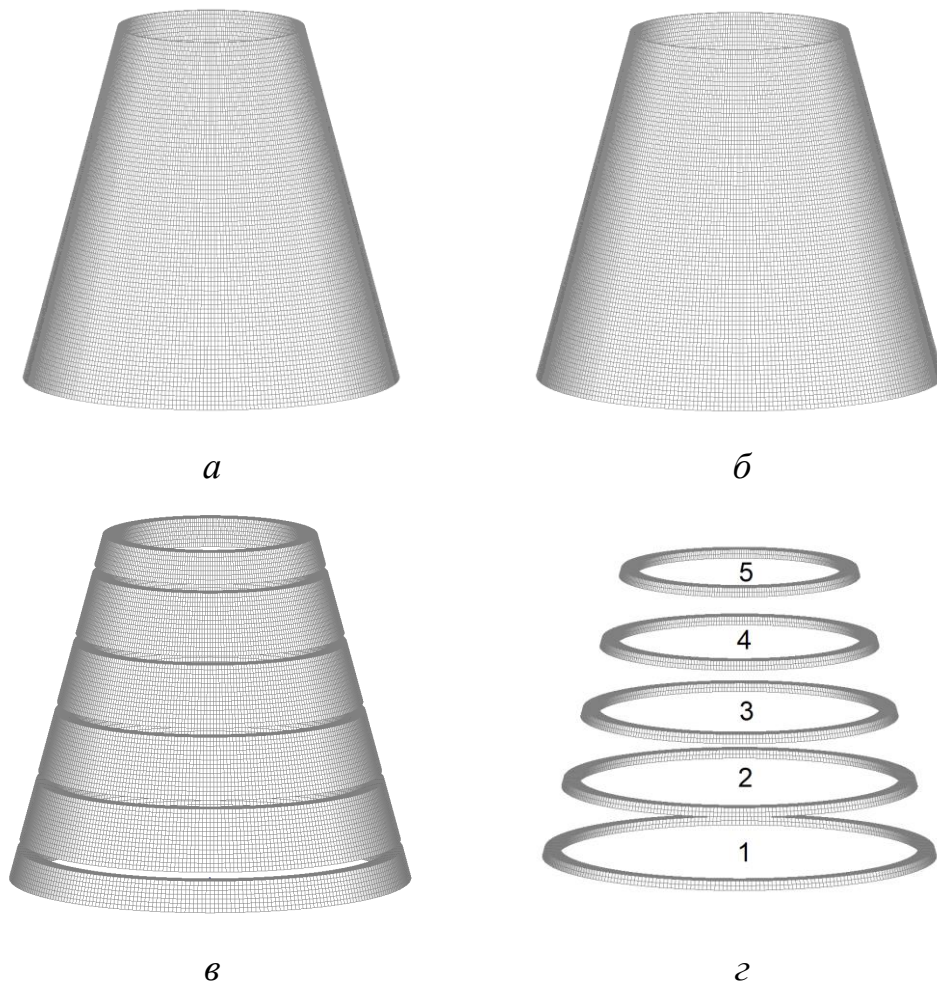


Рис. 5.16. Скінченно-елементна модель тришарової конічної оболонки:

а - внутрішня несуча оболонка; *б* - зовнішня несуча оболонка;

в – армуючі ребра; *г* - легкий заповнювач

Скінченно-елементна модель із заповнювачем довжиною твірної 0,4 м та кутом конусності 15° налічувала 288000 об'ємних скінченних елементів і 315900 вузлів. У варіанті структури без полімерного заповнювача кількість скінченних елементів у внутрішній несучій оболонці складала 48000, зовнішній – 48000, а в армуючих ребрах 24000. Кількість скінченних елементів заповнювача дорівнювала 168000. Адекватність скінченно-елементної моделі тришарової конічної оболонкової конструкції за ступенем увігнутості, звуження та кривизною, внутрішніми кутами та іншими показниками відповідали вимогам якості скінченно-елементної сітки розрахункового програмного пакету

NX Nastran. У моделях використаний тривимірний скінченний елемент суцільного середовища *Solid* (рис. 5.3), який валідує точність і достовірність отриманих результатів [109].

Отримані скінченно-елементним методом чисельні результати дозволяють виконати аналіз напружено-деформованого стану тришарової пружної структури конічного типу за нормальними деформаціями ε_{22} та напруженнями фон Мізеса σ_{vM} в будь-який момент часу у інтервалі: $0 \leq t \leq 15T$. На рис. 5.17 наведено залежності величин цих характеристик у серединних поверхнях несучих шарів вздовж просторової координати s бездефектного стану оболонкової структури. На цьому, і в подальших наведених графіках крива з індексом 1 відповідає величинам ε_{22}^1 ; σ_{vM}^1 внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величинам ε_{22}^2 ; σ_{vM}^2 - зовнішньої конічної оболонки. На рис. 5.17 наведено розподіл цих динамічних характеристик в момент часу $t = 1,6T$ (час досягнення максимального значення величин). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Перша власна частота даної тришарової структури становить 1360,03 Гц.

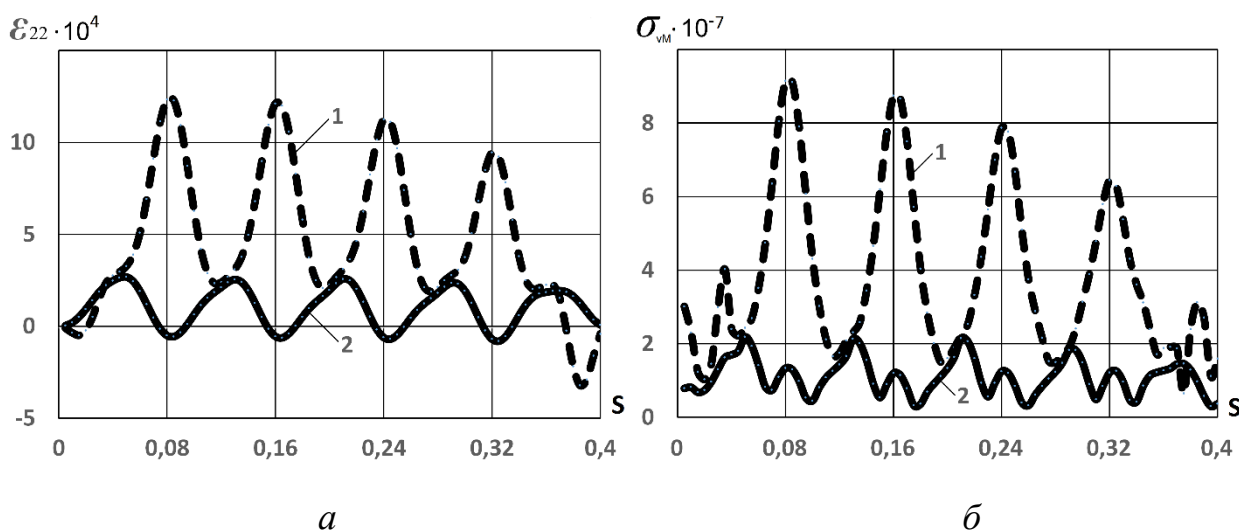


Рис. 5.17. Нормальні деформації (а) і напруження фон Мізеса; (б) в серединній поверхні несучих шарів бездефектного стану структури без заповнювача при жорсткому закріпленні її торців

На рис. 5.18 наведено залежності максимальних нормальних деформацій ε_{22} та напружень фон Мізеса σ_{vM} у серединних поверхнях несучих шарів вздовж

просторової координати s оболонкової структури із дефектом у вигляді наскрізного розриву у п'ятому армуючому ребрі, якщо $t = 3,8 T$.

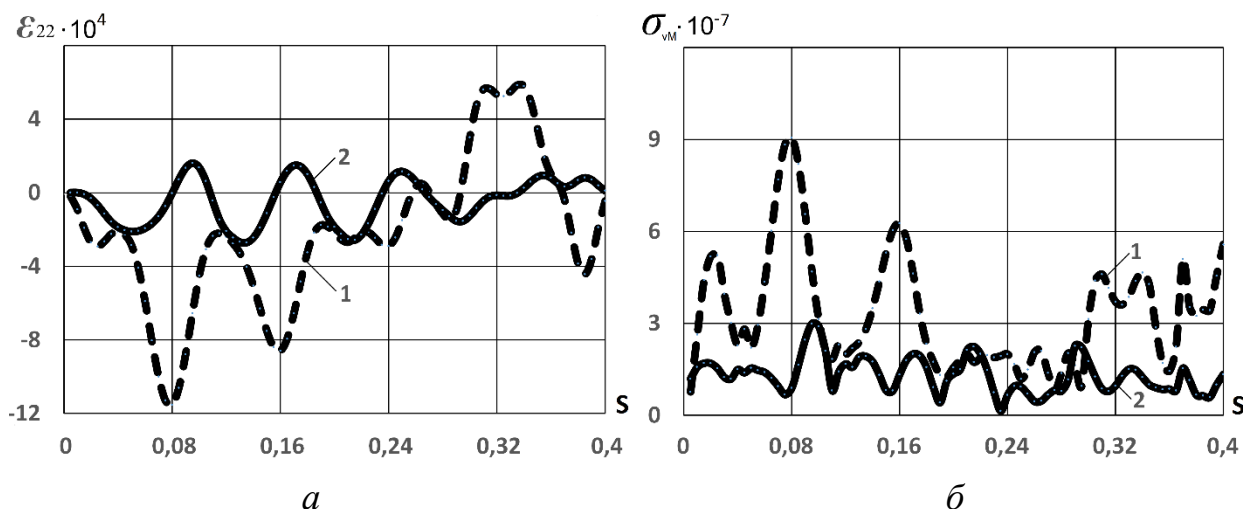


Рис. 5.18. Нормальні деформації (а) і напруження фон Мізеса; (б) в серединній поверхні несучих шарів структури без заповнювача із дефектом у вигляді наскрізного розриву у п'ятому армуючому ребрі

Виходячи з представленого графічного матеріалу, можна візуально визначити вплив дефекту у вигляді наскрізного кільцевого розриву у п'ятому армуючому ребрі конусної структури на розподіл величин максимальних деформацій (а) і напружень фон Мізеса (б) по просторовій координаті s . Перша власна частота такої тришарової структури складає 1359,78 Гц. По відношенню до бездефектного стану структури при жорсткому закріпленні торців оболонки без пінопласту (рис. 5.17) спостерігалось зменшення максимальної величини нормальних деформацій між четвертим та п'ятим армуючими ребрами у внутрішньому шарі на 33%, а у зовнішньому шарі нормальні деформації незначно зменшилися на 2,2%.

Аналогічним чином відбулася зміна величин напружень фон Мізеса в цьому місці. Збільшення відбулося у внутрішньому шарі структури, а у зовнішньому шарі вони майже не змінилися.

Досліджено також вплив легкого заповнювача, який розташований між несучими шарами і дискретно-симетричними ребрами тришарової кінчної структури із жорстко затиснутими краями. На рис. 5.19 наведено графіки

залежності нормальних деформацій (рис. 5.19а) та напружень фон Мізеса

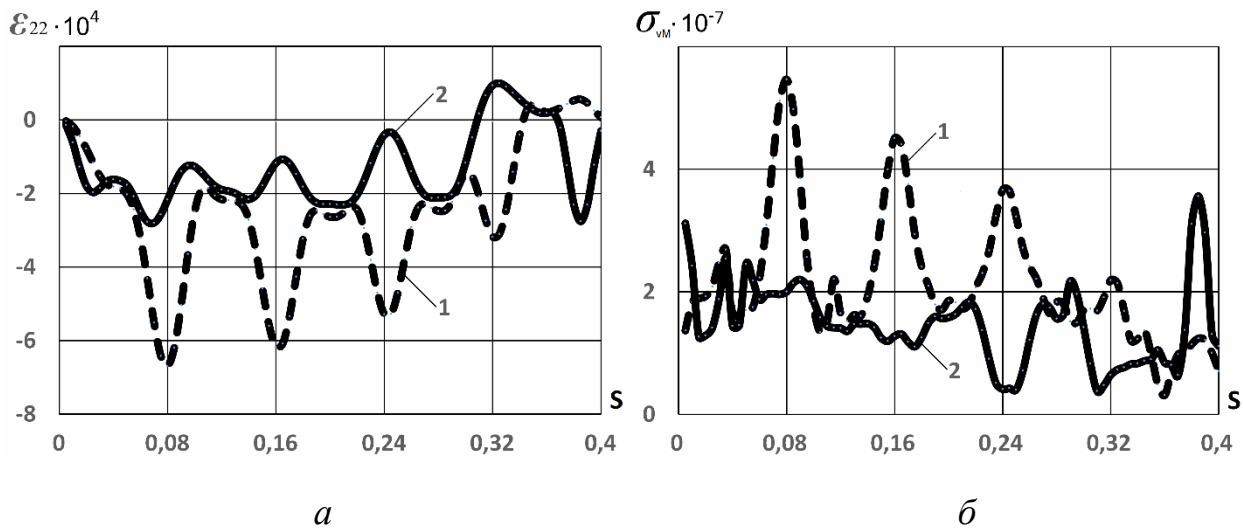


Рис. 5.19. Нормальні деформації (а) і напруження фон Мізеса; (б) в серединній поверхні несучих шарів бездефектного стану структури із заповнювачем (рис. 5.19б) для несучих шарів від поздовжньої координати s в момент часу $t = 3,5 T$ (час досягнення максимального значення величин ε_{22}) для структури без дефектів. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Перша власна частота цієї тришарової структури становить 1439,16 Гц. Отримані результати розподілу нормальних деформацій (рис. 5.19а) та напружень фон Мізеса (рис. 5.19б) майже збігаються з результатами, які були отримані при виникненні кільцевого розриву у п'ятому ребрі кінчної структури в той же момент часу $t = 3,5 T$ рис. 5.20.

Перша власна частота даної структури становить 1438,90 Гц.

Значні зміни розподілу нормальних деформацій (рис. 5.21а) та напружень фон Мізеса (рис. 5.21б) відбулися за відсутності п'ятого ребра кінчної структури із заповнювачем в момент часу $3,7T$. З графічного матеріалу видно, що на ділянці між четвертим та п'ятим армуючими ребрами внутрішня та зовнішня оболонки тришарової структури працюють майже як цільна оболонка, при цьому більш значні деформації та напруження спостерігаються у місці розташування першого армуючого ребра.

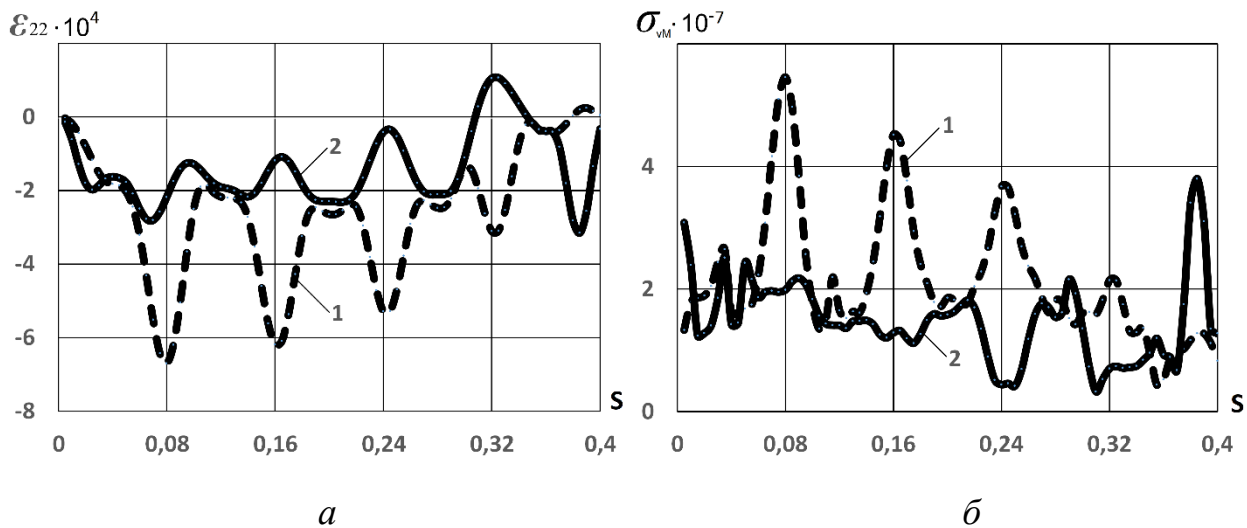


Рис. 5.20. Нормальні деформації (*а*) і напруження фон Мізеса; (*б*) в серединній поверхні несучих шарів структури із дефектом у вигляді наскрізного розриву у п'ятому армуючому ребрі при жорсткому закріпленні торців

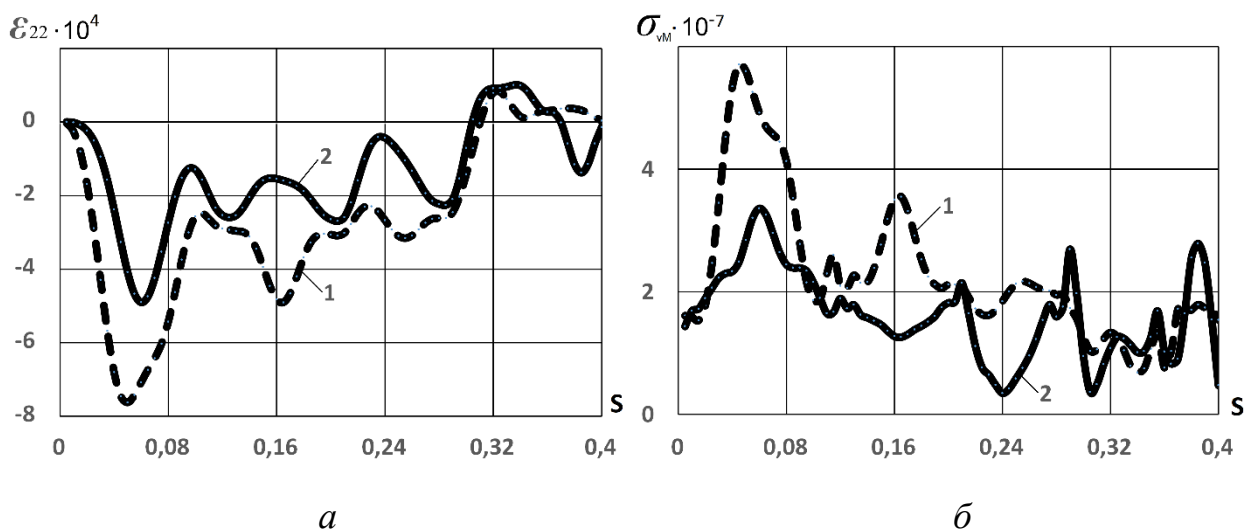


Рис. 5.21. Нормальні деформації (*а*) і напруження фон Мізеса; (*б*) в серединній поверхні несучих шарів структури із заповнювачем при відсутності п'ятого армуючого ребра і жорсткому закріпленні торців

Висновок Аналіз напружено-деформованого стану тришарових конічних оболонок з дефектами є досить складним завданням, що потребує глибокого розуміння механіки матеріалів, просунутих теоретичних моделей та комплексних методів аналізу. Наявність дефектів, таких як геометричні недосконалості, пористість та розриви, в окремих випадках змінює номінальну поведінку оболонки, призводячи до зниження її несучої здатності та провокуючи

катастрофічні види руйнування таких структур. Теоретичні методи показують, що конічні тришарові оболонки досить стійкі до впливу колових розривів у їх армуючих ребрах.

Так розрахунки величин нормальних деформацій ε_{22}^1 та напружень фон Мізеса σ_{VM}^1 внутрішнього шару серединної поверхні тришарової структури конічного типу з жорстким затисненням її країв за наявності розриву у п'ятому армуючому ребрі показали зміну в серединній поверхні між четвертим та п'ятим ребрами. А за наявності міжшарового заповнювача, величини цих характеристик виявились практично однаковими.

Розраховані величини першої власної частоти розглянутих тришарових структур за наявності дефекту у вигляді розриву у п'ятому армуючому ребрі майже не змінюються.

5.3. Особливості впливу колових розривів на динамічну поведінку тришарових півсферичних структур

Досить розповсюджене застосування в техніці знайшли тришарові сферичні конструкції з неоднорідним заповнювачем різної структури. За своїми властивостями і конструкцією тришарові сферичні оболонки поділяються на симетричні і несиметричні. Нестационарні процеси в симетричних тришарових сферичних оболонках досліджені традиційними методами математичної фізики та чисельного аналізу порівняно докладно [121, 122, 123]. Однак, останнім часом, створення прогресивних технологій, об'єктів спеціального призначення часто призводить до необхідності розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. Дослідженню динаміки симетричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним заповнювачем було покладено в роботах [57, 111].

Рівняння коливань несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами гіперболічних рівнянь дев'ятого порядку (2.4.16), які утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі шари-армуючі елементи», «несучі шари-виготовлені з різних матеріалів» .

Числові результати та їх аналіз

Розглянуто задачі динамічного деформування несиметричної тришарової півсферичної оболонки. В даному випадку задача розв'язувалася на кутовому інтервалі $[-\pi/2, \pi/2]$. В силу симетрії відносно вершини сфери при $\alpha = 0$ розглядався інтервал $[0, \pi/2]$. У вершині сфери існує особливість, розкриття якої дозволяє представити граничні умови при $\alpha = 0$ у наступному вигляді:

$$u_1^i = \varphi_1^i = 0; \quad 2 \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - P_3(s_0, t) \delta_{2i} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \quad (5.3.1)$$

при $\alpha = \pi/2$ (жорстке защемлення):

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5.3.2)$$

де δ_{2i} – символ Кронекера.

Внутрішнє навантаження $P_1(s, t)$ задавалося у вигляді:

$$P_1 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (5.3.3)$$

де $A = 10^6$ Па; $T = R_1/c = 5 \cdot 10^{-5}$ с.

Початкові умови нульові для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5.3.4)$$

Розрахунки проводились при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах тришарової структури:

$$E_1 = E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3.$$

$$h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; \quad h_j = 8h_1; \quad R_1 = 0,1 \text{ м}; \quad F_j = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad h/R_1 = 0,2.$$

Також розглянуті випадки наявності легкого заповнювача (пінопласту) з фізико – механічними властивостями $E_t = 1,4 \cdot 10^8$; $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$; $\nu_t = 0,3$.

Дискретні підкріплюючі ребра (паралелі) знаходились в точках

$$\alpha_k = [41 + 40(k-1)] \Delta \alpha_1, \quad k = \overline{1,5} \quad \Delta \alpha_1 = \pi/490.$$

Враховуючи неоднаковість властивостей матеріалів суміжних шарів досліджуваної неоднорідної оболонкової структури відповідна початково-крайова задача розв'язується за допомогою скінченно-елементного методу. Цей метод доцільно використовувати для розрахунку динамічних характеристик

тришарових півсферичних оболонок із дефектами. Створена адекватна скінченно-елементна модель тришарової півсферичної оболонки наведена на рис. 5.22. Вона складається із: *a* – внутрішнього несучого шару; *б* – зовнішнього несучого шару; *в* – легкого заповнювача і *г* – армуючих ребер.

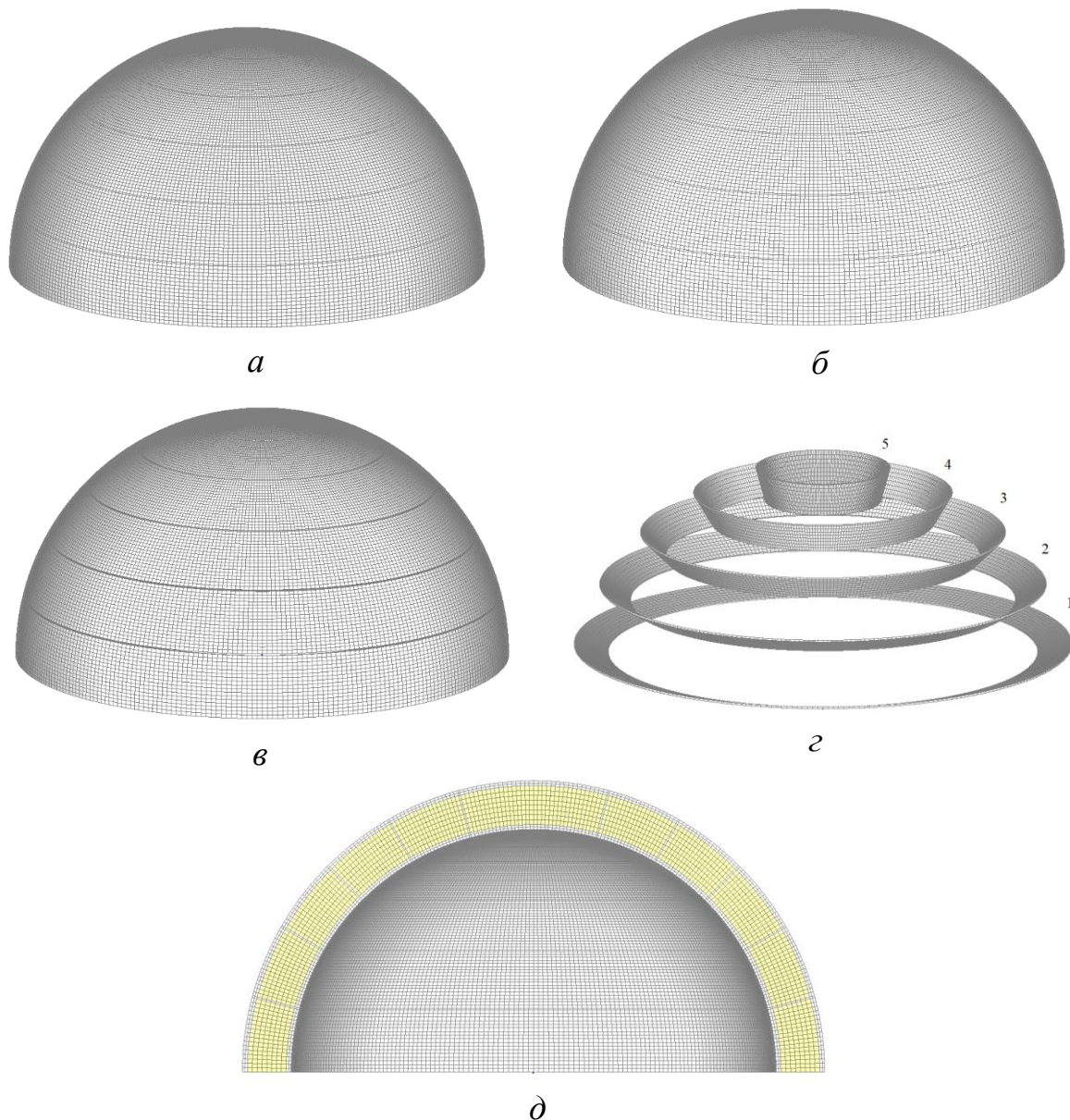


Рис. 5.22. Скінченно-елементна модель тришарової півсферичної оболонки:

a – внутрішня несуча обшивка; *б* – теж саме зовнішня;

в – полімерний заповнювач; *г* – армуючі ребра; *д* – переріз оболонки

В скінченно-елементній моделі півсферичної тришарової оболонки використано тривимірний скінченний елемент суцільного середовища типу *Solid*

(рис. 5.3), у формі восьмивузлового гексаедра, який по критеріям звуження і викривлення геометричної форми, відповідав вимогам забезпечення якості розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні. А у варіанті півсферичної структури без полімерного заповнювача кількість скінченних елементів складала у зовнішній несучій оболонці 66600 елементів, внутрішній – 66600, а в армуючих ребрах – 12000. Кількість скінченних елементів легкого полімерного заповнювача (пінопласту) дорівнювала 254400. Загальна кількість скінченних елементів у моделі без пінопласту складала 145200 елементів і 222913 вузлів. А за наявності пінопласту такі дані дорівнюють: 399600 елементів і 432913 вузлів. При такій розбивці скінченно-елементної моделі на елементи і вузли забезпечується практична якість сітки скінченних елементів.

Отримані чисельні результати дозволяють виконати аналіз напружено-деформованого стану за нормальними деформаціями ε_{22} та напруженнями фон Мізеса $\sigma_{\text{вм}}$ тришарової пружної півсферичної структури в будь-який момент у часовому інтервалі: $0 \leq t \leq 15T$. При дослідженні півсферичних тришарових оболонок розглядались два випадки дефектів у вигляді наскрізних розривів в армуючих ребрах структур. Перший випадок - розрив у п'ятому армуючому ребрі і другий – одночасно розриви у четвертому та п'ятому ребрах (рис. 5.22 г).

На рис. 5.23 наведено розподіл величин максимальних нормальних деформацій $\varepsilon_{22}^1; \varepsilon_{22}^2$ (рис. 5.23 а) та напружень фон Мізеса $\sigma_{\text{вм}}^1; \sigma_{\text{вм}}^2$ (рис. 5.23 б) при жорсткому закріпленні оболонки у момент часу $0,7T$. На цьому, і в подальших наведених графіках крива з індексом 1 відповідає величинам $\varepsilon_{22}^1; \sigma_{\text{вм}}^1$ внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величинам $\varepsilon_{22}^2; \sigma_{\text{вм}}^2$ - зовнішньої сферичної оболонки.

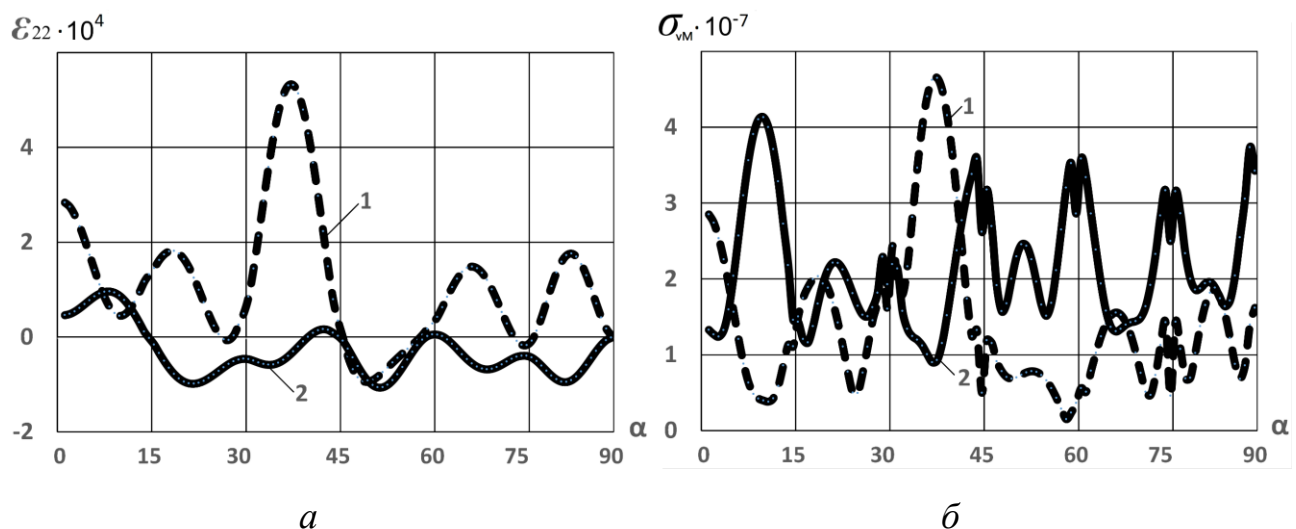


Рис. 5.23. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки без дефектів

Аналіз отриманих графічних матеріалів показує, що по відношенню до стану структури без умовних дефектів при жорсткому закріпленні оболонки за відсутності пінопласту (рис. 5.24) в першому випадку (наскрізний розрив у п'ятому ребрі) в момент часу $11,55T$ максимальні величини нормальних

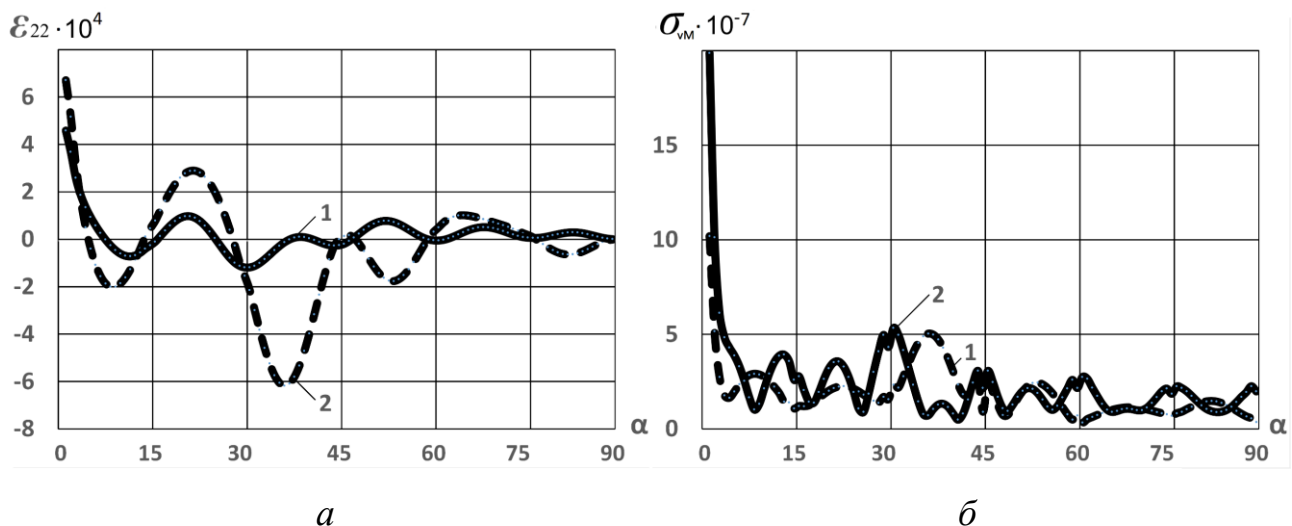


Рис. 5.24. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

деформацій зросли у верхівці півсфери у внутрішньому шарі більш як у 2 рази. А в області між четвертим та п'ятим армуючими ребра у внутрішньому шарі спостерігалось зростання максимальних величин нормальних деформацій на 65%. В зовнішньому шарі у верхівці півсфери спостерігалось зростання

максимальних величин нормальних деформацій майже в 9 раз.

Аналогічно відбувався розподіл максимальних напружень фон Мізеса у верхівці півсфери у внутрішньому шарі, напруження збільшилися в 3,5 рази. При цьому в зовнішньому шарі максимальні напруження зросли майже у 13 раз.

В другому випадку в момент часу $11,1T$ (рис. 5.25а) також у верхівці відбулося збільшення величини нормальної деформації у внутрішньому шарі по відношенню до нормального стану оболонки майже у 3 рази. А у зовнішньому шарі відбулося зростання максимальної величини нормальних деформацій за модулем майже у 2 рази.

При розподілі максимальних напружень в другому випадку (рис. 5.25 б) по відношенню до бездефектного стану відзначалося зростання напруження внутрішнього шару в 4 рази. У зовнішньому шарі максимальні напруження зросли в 2 рази.

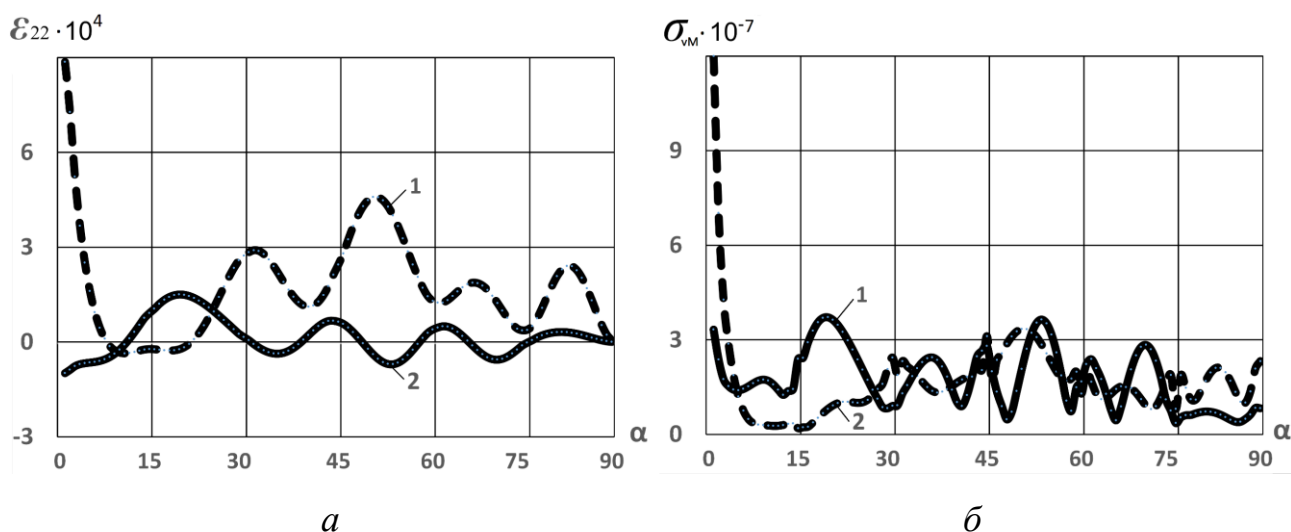


Рис. 5.25. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки з дефектами в четвертому та п'ятому армуючих ребрах

На рис. 5.26 наведено розподіл величин максимальних нормальних деформацій і напружень фон Мізеса структури без пошкоджень за наявності пінопласту при жорсткому закріпленні оболонки у момент часу $0,7T$.

При розгляді дефектів по відношенню до стану структури без пошкоджень при жорсткому закріпленні оболонки за наявності пінопласту в першому випадку в

момент часу $0,7T$ (рис. 5.27 а) спостерігалось збільшення максимальної величини нормальних деформацій у внутрішньому шарі у верхівці на 28%. В зовнішньому шарі максимальні нормальні деформації не змінилися.

Десь аналогічно відбувався розподіл максимальних напружень фон Мізеса (рис. 5.27 б) в першому випадку: збільшення напруження у внутрішньому шарі

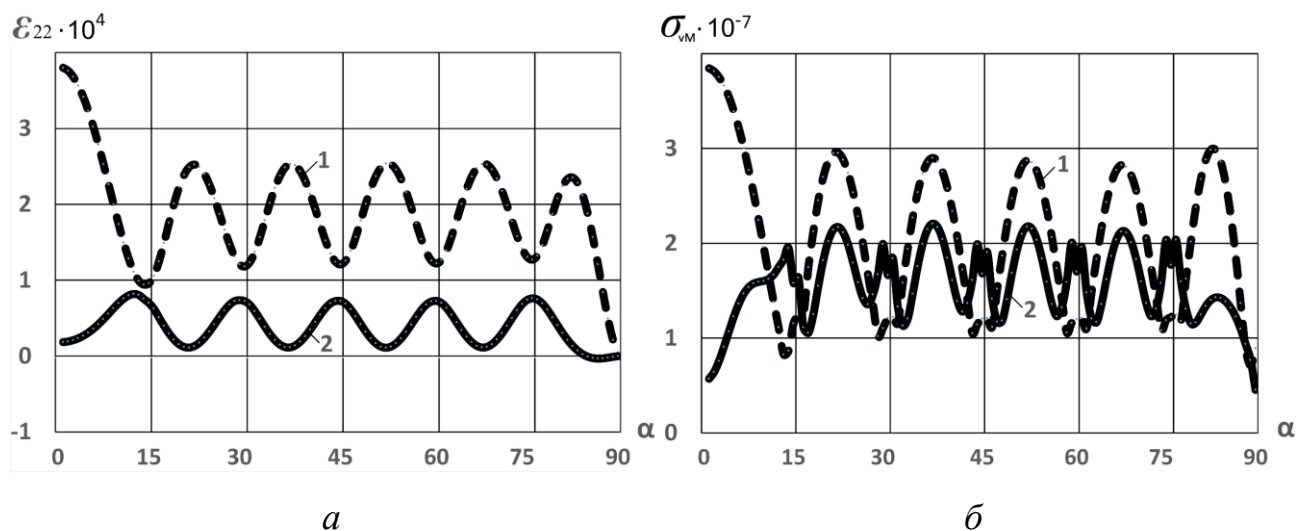


Рис. 5.26. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції з пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки без дефектів

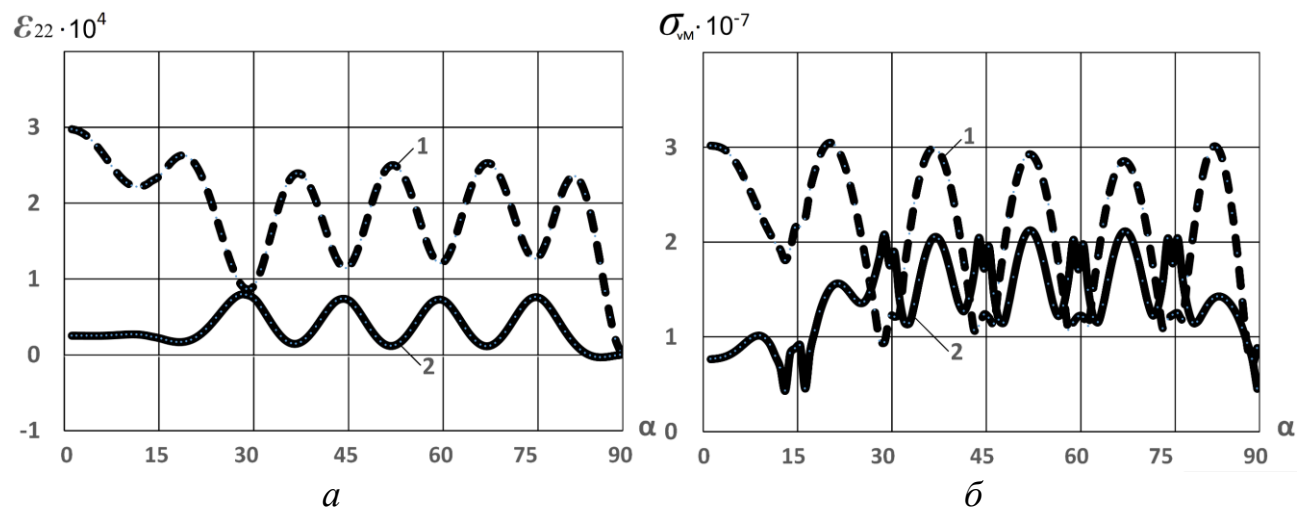


Рис. 5.27. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції з пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому арматуємому ребрі

досягало на 28%, при цьому у зовнішньому шарі величина напруження

зменшилася незначно. У другому випадку в момент часу $0,7T$ (рис. 5.28а) відбулося зростання у 1,75 рази за модулем нормальних деформацій у верхівці оболонки. У зовнішньому шарі зміна величини деформації не відбулася.

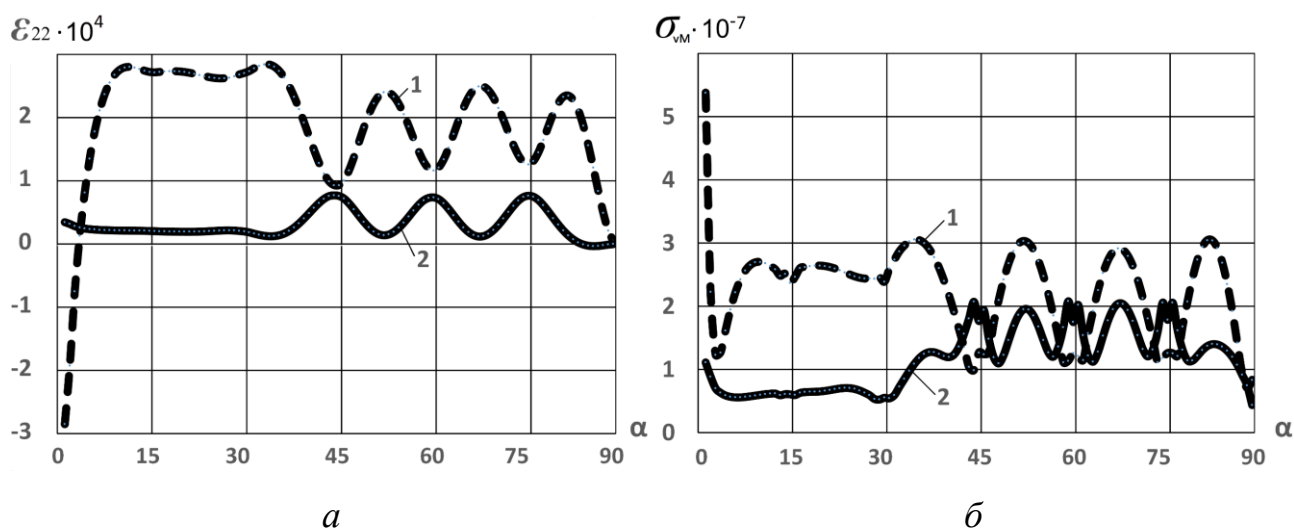


Рис. 5.28. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Жорстке закріплення торців конструкції з пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектами в четвертому та п'ятому армуючих ребрах.

Подібно сталося із змінами напружень фон Мізеса (рис. 5.28б): в місці верхівці оболонки у внутрішньому шарі величина напруження зросла в 1,4 рази по відношенню до бездефектного стану оболонки. Максимальне напруження зовнішнього шару змінилося не значно.

На рис. 5.29 наведено розподіл величин максимальних нормальних деформацій $\varepsilon_{22}^1; \varepsilon_{22}^2$ (рис. 5.29а) та напружень фон Мізеса $\sigma_{vM}^1; \sigma_{vM}^2$ (рис. 5.29б) у момент часу $9,75T$ при комбінованому закріпленні оболонки (знизу - жорстке закріплення, зверху - шарнірне) за відсутності заповнювача.

При розгляді дефектів по відношенню до бездефектного стану структури: при комбінованому закріпленні торців оболонки без пінопласту в першому випадку в момент часу $9,7T$ у верхівці спостерігалось збільшення максимальної величини нормальних деформацій (рис. 5.30а) у внутрішньому шарі майже у 5 разів. В місці між 4 та 5 ребрами максимальні величини нормальних деформацій у внутрішньому шарі збільшилися майже на 28%. Аналогічно відбувалися і зміни

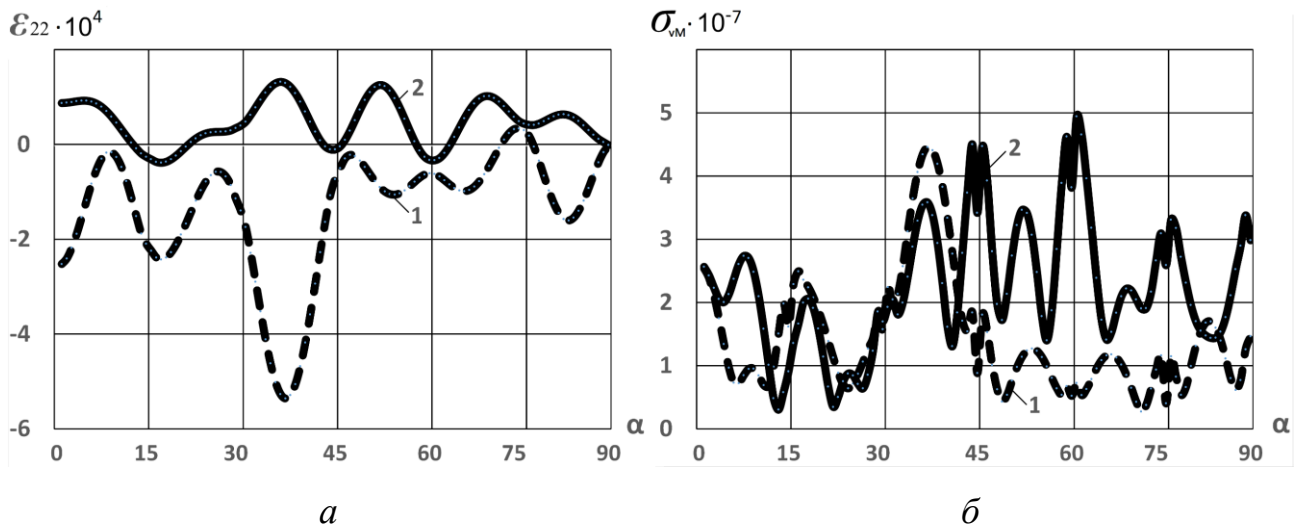


Рис. 5.29. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки без дефектів

максимальних напружень фон Мізеса (рис. 5.30б). В цьому випадку напруження у внутрішньому шарі досягало саме такого збільшення у верхівці структури.

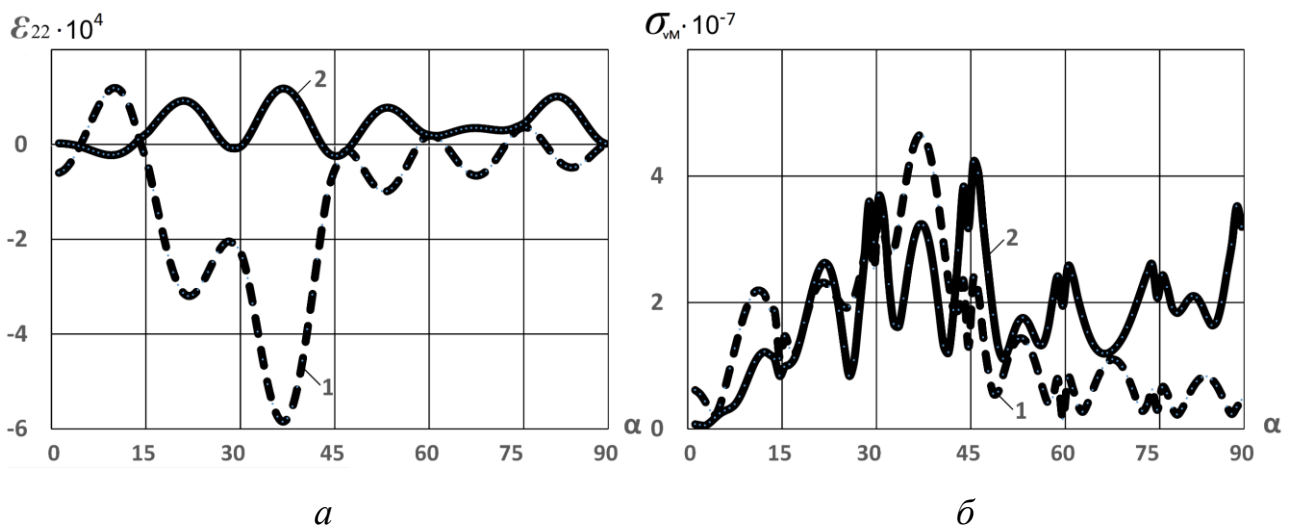


Рис. 5.30. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

У другому випадку в момент часу 7,4Т (рис. 5.31а) у верхівці спостерігалось збільшення за модулем максимальних нормальних деформацій внутрішнього шару в 2,5 рази і між 4 та 5 ребрами відбулося збільшення величин деформацій у зовнішньому шару приблизно 1,6 рази. Величини напружень фон Мізеса у верхівці в несучих шарах оболонки (рис. 5.31б) збільшилися: у внутрішньому шарі в 2,2 рази, а у зовнішньому шарі в 1,6 рази.

На рис. 5.32 наведено розподіл величин максимальних нормальних деформацій $\varepsilon_{22}^1; \varepsilon_{22}^2$ (рис.5.32а) та напружень фон Мізеса $\sigma_{\text{вм}}^1; \sigma_{\text{вм}}^2$ (рис.5.32б)

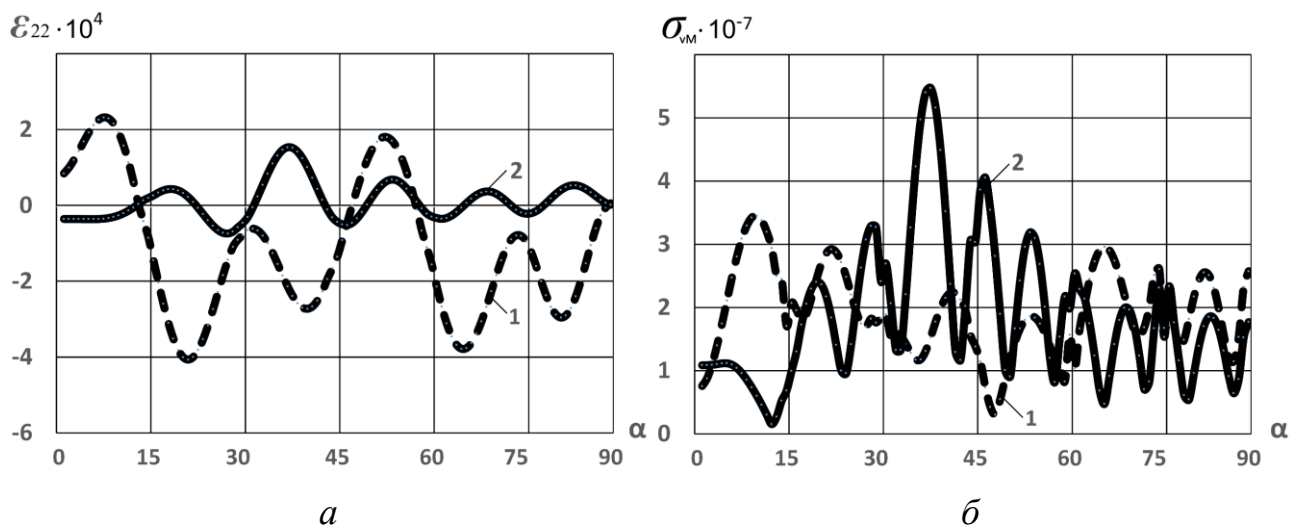


Рис. 5.31. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції без пінопластового заповнювача.

Стан оболонки із дефектом в четвертому та п'ятому ребрах

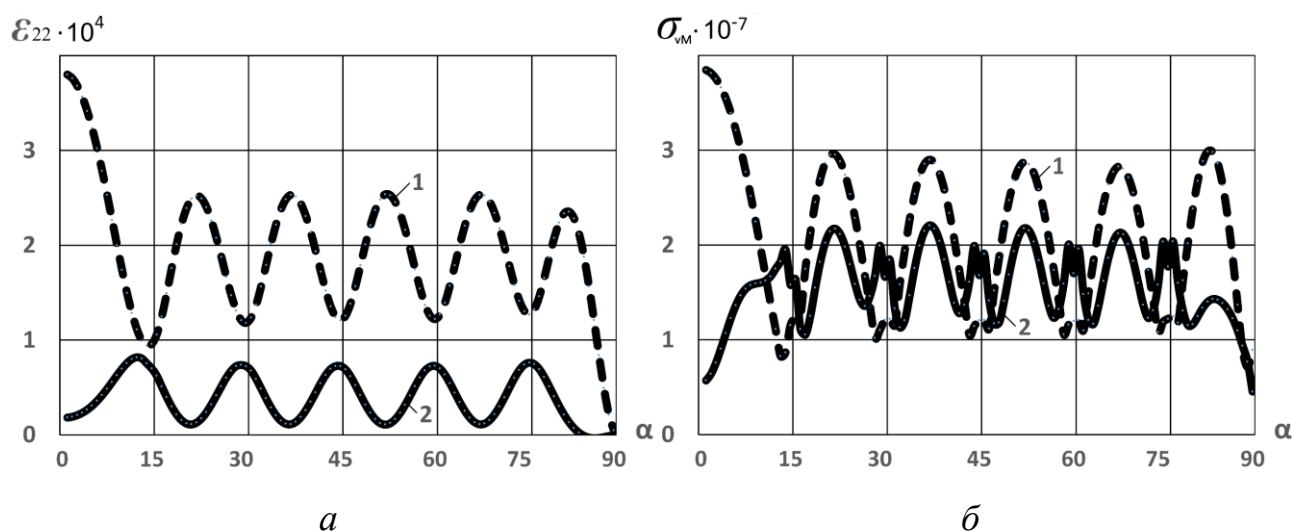


Рис. 5.32. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції із пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки без дефектів

бездефектного стану структури у момент часу 9,75Т при комбінованому закріпленні оболонки (знизу - жорстке закріплення, зверху - шарнірне) за відсутності заповнювача.

По відношенню до стану структури без пошкоджень при комбінованому закріпленні оболонки з пінопластом в першому випадку в момент часу 0,7Т

(рис. 5.33) у верхівці оболонки спостерігалось зменшення максимальної величини нормальних деформацій у внутрішньому шарі на 27%, а у зовнішньому майже не змінилися (рис. 5.33а).

Максимальні напруження фон Мізеса в першому випадку у верхівці у внутрішньому шарі зменшилися також на 27%, а у зовнішньому майже не змінилися (рис. 5.33б).

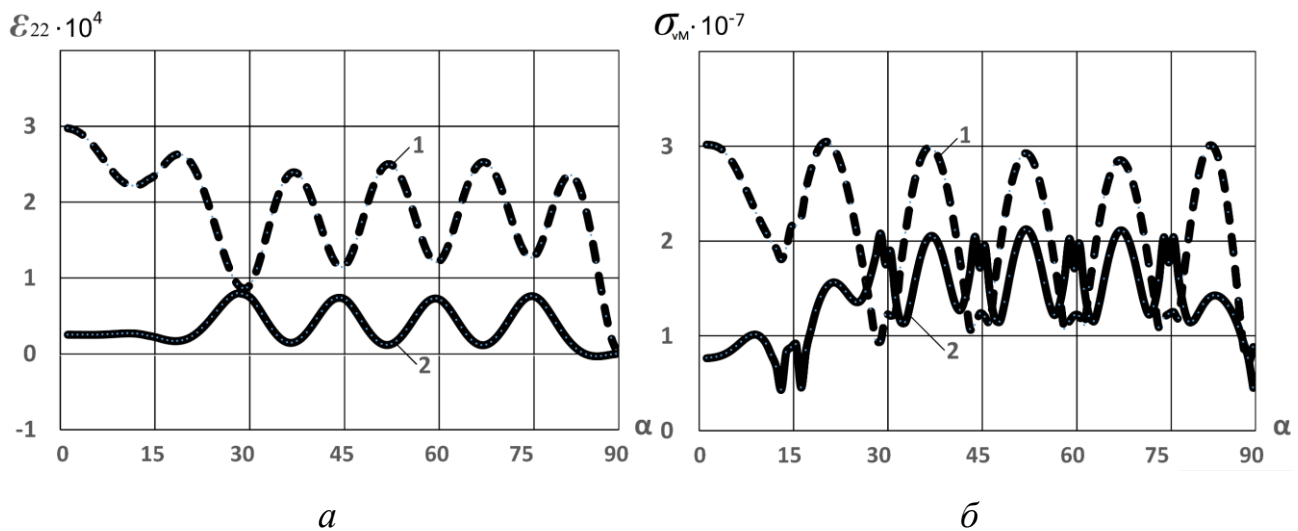


Рис. 5.33. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції із пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектом в п'ятому армуючому ребрі

У другому випадку (рис. 5.34) в момент часу 9,8Т у верхівці нормальні деформації у внутрішньому шарі збільшилися на 5,85%, а у зовнішньому деформації майже не змінилися. При цьому деформації у несучих шарах у місці п'ятого ребра зросли за модулем приблизно у 2,8 рази (рис. 5.34а). Напруження фон Мізеса в другому випадку по відношенню до бездефектного стану структури відзначалися збільшенням величин у несучих шарах у верхівці, а також значним збільшенням у місці п'ятого ребра, майже у 4 рази (рис. 5.34б).

Аналіз власних частот для випадку комбінованого закріплення торців тришарової сферичної оболонкової структури за відсутністю пінопласту (табл. 11) показує, що для першої власної частоти f_1 структури в першому і другому випадку дефектів спостерігалось зменшення величини частоти майже на 0,46% по відношенню до бездефектного стану структури. Для десятої частоти f_{10} спостерігалось

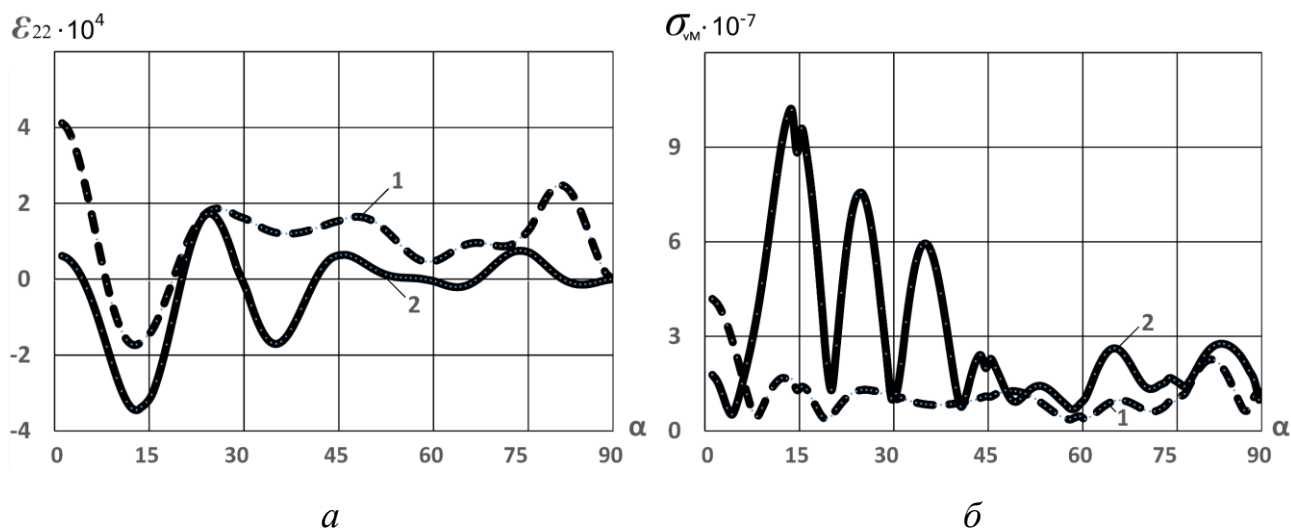


Рис. 5.34. Нормальні деформації (а), напруження фон Мізеса (б).

Комбіноване кріплення торців конструкції із пінопластовим заповнювачем.

Стан оболонки із дефектом в четвертому і п'ятому армуючих ребрах

Таблиця № 11

Власні частоти сферичної оболонки з комбінованим закріпленням торців без
заповнювача, (Гц)

№	Бездефектний стан оболонки	Дефект у п'ятому ребрі	Дефект у четвертому та п'ятому ребрах
f_1	4997.39	4974.21	4973.26
f_2	4997.39	4974.21	4973.26
f_3	5487.40	5471.51	5458.56
f_4	6569.41	6566.71	6485.81
f_5	6569.41	6566.71	6485.81
f_6	6586.37	6583.04	6510.51
f_7	6586.37	6583.04	6510.51
f_8	6757.00	6623.65	6613.73
f_9	7217.57	7008.77	6822.19
f_{10}	7297.86	7204.26	6822.19

зменшення величини частоти у першому випадку дефектів на 1,28%, а у другому – на 6,52% по відношенню до бездефектного стану структури. За наявності пінопласту і аналогічному закріпленні торців (табл. 12) відсоткове зменшення

першої власної частоти f_1 у першому і другому випадках дефектів мало наступні значення: 0,32%, а для десятої частоти f_{10} у першому випадку дефектів 0,26%, а у другому - 3,54% по відношенню до бездефектного стану структури.

Таблиця № 12

Власні частоти сферичної оболонки з комбінованим закріпленням торців із
заповнювачем, (Гц)

№	Бездефектний стан оболонки	Дефект у п'ятому ребрі	Дефект у четвертому та п'ятому ребрах
f_1	5004.37	4988.29	4987.97
f_2	5004.37	4988.29	4987.97
f_3	5515.75	5515.30	5514.79
f_4	6602.49	6598.59	6548.49
f_5	6602.49	6598.59	6548.49
f_6	6655.72	6650.97	6611.19
f_7	6655.72	6650.97	6611.19
f_8	6908.97	6906.48	6898.50
f_9	5004.37	4988.29	4987.97
f_{10}	5004.37	4988.29	4987.97

Висновок. Проаналізовано вплив дефектів структури на характеристики напружено-деформованого стану тришарових півсферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при внутрішньому імпульсному навантаженні за різних граничних умов. В якості дефектів моделювалися наскрізні колові розриви у армуючих ребрах структур. Для аналізу елементів пружної конструкції використано модель теорії оболонок і стержнів Тимошенка за незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. Рівняння руху отримано за варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського. Створено відповідну скінченно-елементну модель півсферичної структури, яка відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в оболонці з потенціалом прикладених сил.

Результати розрахунків нормальних деформацій і напружень фон Мізеса в несучих шарах, отримані методом скінченних елементів, для оболонок з дефектами за різних граничних умов порівняні з відповідними величинами для тришарових півсферичних оболонок бездефектного стану.

Проведені дослідження тришарових півсферичних оболонок показують, що колові розриви у армуючих ребрах структури змінюють величини і розподіл характеристик напружено-деформованого стану, але незначно впливають на зміну величин власних частот конструкції.

Вдячність авторів

Підсумовуючи отримані результати даної монографії слід відзначити, що виконані в ній дослідження доведені до логічного завершення і практичного використання.

Автори висловлюють щиру вдячність д.т.н., професору Петру Захаровичу Луговому за цінні поради надані ним при підготовці і створенні рукопису даної монографії і глибоко уболівають про передчасну зупинку його життя.

Також автори вдячні рецензентам д.т.н., професору В.В. Гайдайчуку і д.т.н., професору Почці К.І. за об'єктивну оцінку матеріалу монографії.

Література

1. Гузь О.М. Теорія нестационарної аерогідропружності оболонок. / О.М. Гузь, В.Д. Кубенко. – Київ: Наук, думка, 1982. – Т.5. – 400 с.
2. Луговий П.З. Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур. / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш. – К.: Ліра, 2022. – 326 с.
3. Novozhilov V.V. Teoriya tonkikh obolochek / V.V. Novozhilov. — L.: Sudpromgiz, 1962. — 431 s.
4. Cauchy A. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide. Exercices de Mathématiques, 3, 1828, p. 328-355
5. Poisson, S.D. Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques. Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France, 8, 1829, 357-570.
6. Kirchhoff G. R. Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. I. Mechanik, 1876
7. Love A.E.H. The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 179(A), 1888.
8. Lyav A. Matematicheskaya teoriya uprugosti / A. Lyav. — 1935. —674 s.
9. Reissner E. Formulation of variational theorems in geometrically Nnonlinear elasticity // 1984, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 110, – P. 1377-1390.
10. Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek. Izbrannyye raboty. / S.P. Timoshenko. – Nauka. – 1971. – 507 s.
11. Григоренко Я. М. Про врахування неоднорідних деформацій поперечного зсуву за товщиною в шаруватих оболонках / Я. М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикладна механіка. -1977. -13, № 10 - С. 36 - 42.
12. Рябов О. Ф. Розрахунок багат шарових оболонок. Київ: Будівельник, 1968. 98 с.
13. Піскунов В. Г., Вериженко В. Е Лінійні та нелінійні задачі розрахунку шаруватих конструкцій. Київ: Будівельник, 1986. 176 с.
14. Рассказов О. О., Соколовська І. І., Шульга Н. А. Теорія та розрахунок шаруватих ортотропних пластин та оболонок. Київ: Вища школа. 1986. 191 с.

15. Рассказов О. О. Геометрично нелінійний напружено-деформований стан багат шарових оболонок зі змінними геометричними параметрами / О. О. Рассказов, В. М. Трач, В.М. Гупалюк // Пробл. міцності. -2000. -13, № 1 - С. 128 - 135.
16. Луговий П.З. Нестационарна динаміка неоднорідних оболонкових конструкцій/Луговий П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Е.А. - К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2005. - 536 с.
17. Sokolin Yu. V., Tashkinov A. A. Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya strukturno-neodnorodnykh tel.: Nauka, 1984. 115 s.
18. Тетерс Г. А. Пластини та оболонки з полімерних композиційних матеріалів. (Огляд). Механіка полімерів. 1977. № 4. С. 486-492.
19. Flyugge V. Statika i dinamika obolochek: 1961. 306 s.
20. Qatu M. S. Recent research advanced in the dynamic behavior of shells: 1989–2000. Pt 1. Laminated composite shells. Applied Mech. Rev. 2002. Vol. 55, № 4. P. 325–350.
21. Головка К.Г. Динаміка неоднорідних оболонок при нестационарних навантаженнях. / К.Г. Головка, П.З. Луговий, В.Ф. Мейш. - За ред. акад. НАН України О.М. Гузя. - К.: Вид. - Полігр. центр "Київський університет", 2012. - 541 с.
22. Senitskiy YU. E. Dinamika trekhsloynnykh sfericheskikh obolochek nesimmetrichnoy struktury / YU.E. Senitskiy, S. A. Lychev // Trudy XVII mezhdunarodnoy konferentsii po teorii obolochek i plastin. –1997. – S. 59-65.
23. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells Applied Mech. Rev. 2003. Vol. 56, № 4. P. 287–308.
24. Volmir A.S. Ustoichivost deformiruemykh sistem / A.S. Volmir. Fizmatizdat, 1963. — 981 s.
25. Мейш В.Ф. Порівняльний аналіз динамічної поведінки тришарових оболонок у рамках прикладних теорій за нестационарних навантажень / В.Ф. Мейш, Ю.А. Хамренко // Прикл. механіка, 39, №7, 2003. – С.123–130.

26. Chernykh K.F. Lineynaya teoriya obolochek / K.F. Chernykh. 1964. — СН. II. — 395 s.
27. Аміро І.Я. Динаміка ребристих оболонок/І.Я. Аміро, В.О. Заруцький, В.Г. Паламарчук. - К.: Наук. думка, 1983. - 204 с.
28. Pertsev A.K. Dinamika plastin i obolochek / A.K. Pertsev, E.G. Platonov: — Sudostroenie, 1987. — 317 s.
29. Mushtari K.H.M. Nelineynaya teoriya uprugikh obolochek / K.H.M. Mushtari, K.Z. Galimov. —1957. — 431 s.
30. Баженов В.А. Розрахунок композитних конструкцій з урахуванням розшарування / В.А. Баженов, Є.А. Гоцуляк, А. І. Оглобля - К.: Будівельник, 1992. - 136 с.
31. Гайдайчук В.В. Механіка конструкцій вітроенергетичних установок/ В.В. Гайдайчук, В.П.Носенко, С.М. Худолій. — К.: Видавництво Аграр Медіа Груп, 2013. — 263 с.
32. Гуляєв В.І. Стійкість періодичних процесів у нелінійних механічних системах/В.І. Гуляєв, В.А. Баженов, Є.А. Гоцуляк, П.П. Лизунів. - Л.: Вища школа, 1983. - 288 с.
33. Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnikh obolochek / S.A. Ambartsumyan: Nauka, 1974.— 446 s.
34. Grigolyuk E. I., Kogan Ye. A. Sovremennoye sostoyaniye teorii mnogoslownykh obolochek. Prikladnaya mekhanika. 1972. T. 8, № 6. S. 3–18.
35. Grigolyuk E. I. Problemi nelineinogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineinikh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela / E.I. Grigolyuk, V. I. Shalashilin: Nauka. –1988. –232 s.
36. Grigolyuk E. I. Nelineinoe deformirovanie tonkostennikh konstruksii / E.I. Grigolyuk, V. I. Mamai: Nauka. –1997. –272 s.
37. Korolev V.I. Uprugo-plasticheskie deformatsii obolochek / Korolev V.I.: Mashinostroenie, 1971. –303
38. Пелех Б. Л. Теорія оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю. Київ: Наук. думка, 1973. 247 с.

39. Пелех Б. Л. Деякі питання розвитку теорії та методів розрахунку анізотропних оболонок та пластин з кінцевою зсувною жорсткістю. *Механіка полімерів*. 1975. № 2. С. 269-284.
40. Рікардс Р. Б., Тетерс Г. А. Стійкість оболонок із композитних матеріалів. Рига: Зінатне, 1974. 310 с.
41. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika plastin i obolochek* / A.S. Volmir: Nauka, 1972. — 432 s.
42. Goldenveizer A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek*: Nauka, 1976. 512 s.
43. Заруцький В.А. Експериментальні дослідження динаміки оболонок обертання (огляд)/В.А. Заруцький, В.Ф. Сівак // *Прикл. механіка*. - 1999. - Т. 35, № 3. - С. 3-11.
44. Механіка композитних матеріалів та елементів конструкцій / Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Бабич І. Ю. та [ін.]. Київ: Наук. думка, 1983. Т.2: Механіка елементів конструкцій. 464с.
45. Розрахунок ортотропних шаруватих оболонок обертання зі змінними параметрами на ЄС ЕОМ/Григоренко Я. М., Китайгородський А. Б., Семенова В. В. та ін. Київ: Наук, думка, 1980. 104 с.
46. Гузь О.М. Експериментальні дослідження тонкостінних конструкцій/О.М. Гузь, В.А. Заруцький, І.Я. Аміро та ін. - К: Наук. думка, 1984. -240 с.
47. Goryacheva I. G., Martynyak R. M. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2014. Vol. 228, No. 7. P. 707–716.
48. Bazhenov V.G., Batanin M.A., Zefirov S.V i dr. Chislennoye resheniye dvukhmernykh nestatsionarnykh zadach dinamiki tonkostennykh uprugoplasticheskikh konstruktsiy s zapolnitelem // *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya zadach upru gosti i plastichnosti*. –1981. – С. 46 – 57.
49. Гузь О.М. Механіка руйнування композитних матеріалів під час стиснення / О.М. Гузь. - К.: Наук. думка. - 1990. - 630 с.

50. Лізунов П.П. Напружено-деформований стан замкнених конічних оболонок при складному обертанні / П.П. Лізунов, Е.З. Криксунов, О.М. Фесан // Опір матеріалів і теорія споруд. — 2019. — № 107. — С. 191-198.
51. Луговий П.З. Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш. — К.: Ліра, 2022. — 326 с.
52. Мейш В.Ф. Порівняльний аналіз динамічної поведінки тришарових оболонок у рамках прикладних теорій за нестационарних навантажень / В.Ф. Мейш, Ю.А. Хамренко // Прикл. механіка, 39, №7, 2003. — С.123–130.
53. Гуляєв В.І. Некласична теорія оболонок та її додаток до вирішення інженерних задач/Гуляєв В.І., В.А. Баженов, П.П. Лізунов. Л: Вища школа, 1978. - 192 с.
54. Гузь А. Н. Механіка композитних матеріалів та елементів конструкцій / Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Бабич І. Ю. та [ін.]. Київ: Наук. думка, 1983. Т.2: Механіка елементів конструкцій. 464с.
55. Трач В. М. Використання уточненої теорії типу Тимошенко до побудови системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання / В. М. Трач, О. Г. Бондарський, М. М. Хоружий // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. - 2013. - Вип. 27. - С. 382-392.
56. P.Z. Lugovyi Stress-strain state of three-layer cylindrical shells with reinforced light core under nonstationary loading / P.Z. Lugovyi, V.V. Gaidaichuk, Yu.V. Skosarenko, K.E. Kotenko // Int. Appl. Mech., –2021.57, N 4, –p.395 – 404.
57. Meish V.F., Shtantsel S E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech., - 2002. 38 № 12, - P. 1501 - 1507.
58. Timoshenko S.P. Ustoichivost uprugikh sistem. / S.P. Timoshenko: – 1946. – 532 s.
59. Shimanskii Yu. A. Stroitel'naya mekhanika podvodnykh lodok / Yu.A. Shimanskii: – 1948. –230 s.
60. Мейш Ю. А. Коливання циліндричних дискретно підкріплених оболонок на пружній основі при нестационарних навантаженнях // Вісник

Національного транспортного університету: ч. 2. – К.: НТУ, 2012. – Вип. 26. С. 578-583

61. Луговий П.З. Про вирішення осесиметричних задач динаміки підкріплених конічних оболонок на пружній основі / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій / Дніпропетровський Національний ун-т. - 2009, вип. 13. - С. 142 - 148.
62. Аміро І.Я. Коливання ребристих оболонок обертання/І.Я. Аміро, В.О. Заруцький, В.І. Ревуцький. - К.: Наукова думка. - 1988. - 171 с.
63. Аміро І.Я. Облік дискретного розміщення ребер щодо напружено-деформованого стану, коливань і стійкості ребристих оболонок // Прикл. механіка, 34, № 4, 1998. - С.3-22.
64. Луговий П.З. Неосесиметричні коливання ребристої циліндричної оболонки з урахуванням зсувних деформацій / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш// Прикл. механіка, 1989, 25 №5, с.50-55.
65. Луговий П.З. Осесиметричні коливання ребристої сферичної оболонки з отвором при імпульсних навантаженнях/П.З. Луговий, В.Ф. Мейш// Прикл. механіка, 1990, 26 №5, с.51-56.
66. Ревуцький В.М. Про власні коливання ребристих сферичних оболонок/В.М. Ревуцький // Прикл. механіка, 1984, 20 №7, с.42-48.
67. Ревуцький В.М. Власні коливання сферичних оболонок, підкріплених меридіональними ребрами / В.М. Ревуцький // Прикл. механіка, 1984, 20 №9, с.119-121.
68. Анканець Є.К. Власні коливання циліндричної оболонки з кільцевими ребрами, які приєднані до неї за допомогою дискретних пружних в'язей / О.К. Анканець// Прикл. механіка, 2005, 41 №8, с.105-110.
69. Заруцький В.О. Власні коливання ребристих циліндричних оболонок за низької зсувної жорсткості матеріалу/В.О. Заруцький, Н. Я. Прокопенко // Прикл. механіка, 2005, 41 №4, с.66-74.

70. Кохманюк С.С. Коливання систем, що деформуються, при імпульсних і рухливих навантаженнях / С.С. Кохманюк, Є.Г. Янютін, Л.Г. Романенко. - К.: Наук. думка, - 1980. - 232 с.
71. Antufyev B.A. Sobstvennyye kolebaniya tsilindricheskoy obolochki diskretno podkreplenooy neregulyarnoy sistemoy stringerov / B.A. Antufyev, S.B. Antufyev, V.N. Sergeyev // 2000, №1, s.54-56.
72. Григоренко Я.М., Беспалова О.І., Китайгородський А.Б., Шинкар А.І. Вільні коливання елементів оболонкових конструкцій. - К.: Наук. думка, 1986. - 172 с.
73. Бабич Д.В. Власні коливання оболонок обертання із термочутливих композитних матеріалів / Д.В. Бабич, В. В. Воробей, В.І. Тарасюк, Л.П. Хорошун // Прикл. механіка, 1984, 20 №9, с.119-121.
74. Бабич Д.В. Про власні коливання конічної ортотропної оболонки з малими викривленнями твірної / Д.В. Бабич// Прикл. механіка, 1999, 35 №3, с.64-68.
75. Богданович О. Е. Власні коливання ортотропних ребристих циліндричних оболонок/О.Е. Богданович, В.О. Заруцький // Прикл. механіка, 1991, 27 №27, с.83-90.
76. Галака П.І. Власні коливання ребристих циліндричних оболонок/П.І. Галака, В.О. Заруцький, В.І. Мацнер// Прикл. механіка, 1974, 10 №7, с.83-90.
77. Каїров О.С. Власні коливання підкріплених ребрами конструктивно неоднорідних циліндричних оболонок / О.С. Каїров, О.І. Власов // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій: збірник наукових праць, 2011, вип. 16, с.134-140.
78. Каїров О.С. Вільні коливання конструктивно неоднорідних багат шарових циліндричних ортотропних оболонок з композиційних матеріалів / О.С. Каїров., О.І. Власов, Л.О. Латанська // Вісник Запорізького національного університету, 2017, №2, с.57-65.

79. Кононенко В.О. Вільні коливання ребристих циліндричних оболонок із приєднаною масою / В.О. Кононенко, В.Г.Паламарчук, О.М. Носаченко // Прикл. механіка, 1977, 13 №1, с.40-46.
80. Курпа Л. В. Дослідження власних коливань багатошарових пологих оболонок та пластин складної форми в плані / Л. В. Курпа, А. В. Чистиліна // Проблеми міцності. - 2003. - № 2. - С. 112-123
81. Рассказов О.О. До теорії коливань багатошарових ортотропних оболонок/О.О. Рассказов // Прикл. механіка, 1976, 11 №11, с.50-56
82. Yemel'yanova T. A. Differentsial'nyye uravneniya svobodnykh kolebaniy trekhsloynoy obolochki / T.A. Yemel'yanova // Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhvedomstvennyy sbornik nauchno-metodicheskikh statey / 2002. – S. 169-181.
83. Ємельянова Т.А. Розв'язуюче рівняння вільних колінь тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена ребрами жорсткості / Т.А. Ємельянова // Вісник ХНТУ №2(57), 2016 р., с. 11-16.
84. Скосаренко Ю. В. Власні коливання ребристої оболонки нульової гаусової кривизни з консольно приєднаною масою / Ю. В. Скосаренко // Прикл. механіка, 1984, 20 №2, с.35-41
85. Скосаренко Ю. В. Вимушені коливання ореброваної конічної оболонки під дією гармонійного навантаження / Ю. В. Скосаренко // Прикл. механіка, 1979, 15 №6, с.55-61
86. Аміро І.Я. Динаміка ребристих оболонок/І.Я. Аміро., В.О. Заруцький, В.Г. Паламарчук // - К.: Наук. думка, 1983. - 204 с.
87. Аміро І.Я. Методи розрахунку оболонок/І.Я. Аміро., В.О. Заруцький // - К.: Наук. думка, 1980. - 368 с.
88. Заруцький В.О. Оптимізація підкріплених циліндричних оболонок / В.О. Заруцький, Ю.М. Поштан, В.В. Скалозуб// - Київ: Вища школа, 1990. - 138 с.
89. Pasternak P.L. Osnovi novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli / P.L. Pasternak: 1954, 56 s.

90. Vlasov V.V. Balki, pliti, obolochki na uprugom osnovanii / V.V. Vlasov, N.N. Leontev : 1960, – 492s.
91. Аміро Г.М. Ребристі циліндричні оболонки / І.Я. Аміро, В.О. Заруцький, П.С. Поляков // - К.: Наук. думка, 1973. - 248 с.
92. Луговий П.З. Динаміка тришарових композитних оболонок з дискретно неоднорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях / П.З. Луговий П.З., В.В. Гайдайчук, С.П. Орленко, К.Е. Котенко // Прикл. механіка, 2022, 58, №4, с.45-58
93. Заруцький В.О. Вимушені коливання подовжньо підкріпленої циліндричної оболонки, що несе локально приєднану масу / В.О. Заруцький // Прикл. механіка, 1977, 13 №1, с.40-46.
94. P.Lugovyy Theoretical analysis of the influence of structural defects on the amplitude-frequency characteristics of three-layer cylindrical shells / P.Lugovyy, Yu. Skosarenko, V. Sirenko, D. Klymenko, K. Kotenko // Z Angew Math Mech. 105, e70279 (2025). <https://doi.org/10.1002/zamm.70279>
95. Старовойтов Е. І. Коливання тришарових циліндричних оболонок у пружному середовищі Вінклера при резонансі /Е. І. Старовойтов, Д. В. Леонеко, Ю. М. Плечевський // Механіка машин, механізмів та матеріалів. 2013. № 4 (25), с.70-73
96. Мейш Ю. А. Задачі про вимушені коливання циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при нестационарних навантаженнях / Ю. А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету. - 2014. - № 29(1). - С. 173-179.
97. Мейш Ю. А. Вимушені коливання поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при нестационарних навантаженнях / Ю. А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету. - 2016. - № 1. - С. 267-274.
98. Lyakhov V.M. Volni v gruntakh i poristikh mnogokomponentnikh sredakh. / V.M. Lyakhov: 1982. - 288 s.

99. Луговий П.З. Динаміка несиметричних тришарових півсферичних оболонок із дискретно неоднорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях / П.З. Луговий П.З., В.В. Гайдайчук, С.П. Орленко, К.Е. Котенко // Проблеми. міцності, 2023, 58, №2, с.36-48

100. Луговий П.З. Динаміка перехідних процесів в тришарових циліндричних елементах з неоднорідним заповнювачем при комбінованих нестационарних навантаженнях/ П.З. Луговий П.З., В.М. Сіренко, В.Д. Клименко, К.Е. Котенко // Прикл. механіка, 2023, 59, №6, с.26-40.

101. Мейш В.Ф. Вирішення задач динамічної поведінки циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях / В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, Н.П.Кепенач // Теоретична та прикладна механіка. - 2014. №8 (54). - С. 98-105.

102. Григорян С. С. Про основні уявлення динаміки ґрунтів / С. С. Григорян// Прикладна математика та механіка, 1960, 24; №6, с. 1057-1072.

103. Скосаренко Ю.В. Про вплив положення маси та кута конусності на частоти власних коливань ребристих оболонок/Ю.В. Скосаренко// Прикл. Механіка. - 1987, 23, №2, с.119-122

104. Karmishin A.V. Statika i dinamika tonkostennikh obolochek i konstruktsii/ A.V. Karmishin, Lyaskovets V. A., Myachenkov V.I., Frolov A.N.: 1975–376 s.

105. Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R. and Malekzadeh Fard K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European Journal of Mechanics A/Solids. 2011. 31 – P. 54–66.

106. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki / S.P. Timoshenko, S. Voinovskii-Kruger: Nauka, 1966. – 636 s.

107. Shtantsel S E. Numerical simulation of dynamical behaviour of threelayered spherical shells with discrete ribbed filler under nonstationary loading // Space Materials and Technologies – 2002. –8, N 1. – P. 159 – 163

108. Frostig Y., Thomsen O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – 41. – P. 1697 – 1724.

109. Richkov S.P. Modelirovanie konstruksii v srede Femap with NX Nastran: 2013.– 784 s.
110. Луговий П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних структур: монографія / під ред. акад. НАН О.М. Гузя. Київ: Видавництво Ліра, 2022. 326 с.
111. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E., Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int Appl. Mech. – 2005. – 41, N 2. – P. 161 – 167.
112. Мейш В.Ф. До розрахунку нестационарних коливань тришарових пологих циліндричних оболонок з дискретним ребристим наповнювачем / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш Ю.А., Таєверє Д.А. // Вісник Національного транспортного ун – ту. Ч. 2. – Київ: НТУ, 2008. – Вип. 17. – С. 409 – 414.
113. Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E., Lavinsky D. S. Impact of elasticity of polymer filler of three-layer cylindrical structure of elliptical section on its behavior under internal impulse loading / Опір матеріалів і теорія споруд: науково-техн. збірн.–К.: КНУБА, 2022, № 109. – P. 467-472.
114. Lugovoi P. Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E. Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading "International Applied Mechanics", 2021, 57(4), P. 395–404.
115. Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E. Stress - strain state of a three-layer cylindrical shell under internal axisymmetric pulse load c Strength of Materials and Theory of Structures. – 2020. – Issue. 105. – P.– 145-151.
116. Segerlind L. Primeneniye metoda konechnykh elementov. 1979.-392s.
117. Ianczos Cornelius The variational principles of mechanics. Universitu of Toronto press Toronto 1962.- 408 c.
118. Lugovyi P. Z., Sirenko V. M. Klimenko D.V., Kotenko K. E. Transient Processes in Three-Layer Cylindrical Elements with Inhomogeneous Core Under Combined Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, № 5. – P. 573 – 584.

119. Bakulin, V.N. Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Sandwich Conical Aircraft Compartments with Rectangular Cutouts. Russ. Aeronaut. 65, 668–676 (2022).

120. Wang Q., Li W., Zhao Z., Liu D., Gao S. Three-Dimension Crack Propagation Behavior of Conical-Cylindrical Shell, Structures, Volume 69.

121. Lychev S.A., Sayfutdinov YU.N. Dinamika trekhsloynoy nepologoy sfericheskoy obolochki // Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. – 2007. № 2. – S. 54 – 90.

122. Lychev, S.A, Sidorov YU.A. Nestatsionarnyye kolebaniya trekhsloynykh sfericheskikh obolochek s kratnym spektrom // Stroitel'stvo. – 2001. – № 4. – S. 31 – 39.

123. Піскунов В.Г., Рассказов О. О. Успіхи механіки: (за загальною редакцією А.Н. Гузя): у 6-ти томах. Т.3. Розвиток теорії шаруватих пластин та оболонок. - Київ: "А.С.К.", 2007. - С. 141 - 175.